次の問に答えよ。

(1) $\alpha=\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ とするとき，整数係数の4次多項式 $f(x)$ で $f(\alpha)=0$ となるもののうち，$x^4$ の係数が1であるものを求めよ。

(2) 8つの実数

$$\pm\sqrt{13}\pm\sqrt{9+2\sqrt{17}}\pm\sqrt{9-2\sqrt{17}}$$

(ただし，複号 ± はすべての可能性にわたる）の中で，(1)で求めた方程式 $f(x)=0$ の解となるものをすべて求め，それ以外のものが解でないことを示せ。

(3) (2)で求めた $f(x)=0$ の解の大小関係を調べ，それらを大きい順に並べよ。

＜ '15 名古屋大 ＞

**【戦略】**

(1) **少しでも目の負担を減らすために，置き換えを駆使していきます。**

**方針は「2乗したときに $\sqrt{\quad}$ が消えるようにうまく移項する」**

**という基本に従えばよいでしょう。**

(2) **さすがに8個の検証はしんどいです。**

**(1)で $f(x)$ を得るための導出過程で，左辺と右辺を2乗することで**

$$(\quad)^2=(\quad)^2$$

**として，$\sqrt{\quad}$ を消すという作業を行っていると思います。**

**これを整理して $f(x)$ が得られたということは，逆に言えば**

**$f(x)=(\quad)^2-(\quad)^2$ という形で表せて因数分解に持ち込める**

**ということに他なりません。**

(3) **(2)で得られる**

$$\alpha=\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$$
$$\beta=\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}$$
$$\gamma=-\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}$$
$$\delta=-\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$$

**という4つの解の評価です。**

**$2\sqrt{17}\ (=\sqrt{68})$ が 8.＊＊… です**

**$\alpha>\gamma>\beta>\delta$ という想像がつきましたら，あとは差を取って確認すればよいでしょう。**

【解答】

(1) $u=\sqrt{9+2\sqrt{17}}$，$v=\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ とおく。

このとき，$\begin{cases}u^2=9+2\sqrt{17}\\ v^2=9-2\sqrt{17}\end{cases}$ であり，$\begin{cases}u^2+v^2=18\\ uv=\sqrt{13}\end{cases}$

$\alpha=\sqrt{13}+u+v$ で，$\alpha-\sqrt{13}=u+v$ であるため

$(\alpha-\sqrt{13})^2=(u+v)^2$ から，$\alpha^2-2\sqrt{13}\alpha+13=u^2+v^2+2uv$

よって，$\alpha^2-2\sqrt{13}\alpha+13=18+2\sqrt{13}$ であり，これより

$$\alpha^2-5=2\sqrt{13}(\alpha+1)$$

さらに，$(\alpha^2-5)^2=52(\alpha+1)^2$ であり，これを整理すると

$$\alpha^4-62\alpha^2-104\alpha-27=0$$

よって，$f(x)=x^4-62x^2-104x-27$ は $f(\alpha)=0$ を満たす整数係数多項式であり，$x^4$ の係数が1である。

$$f(x)=x^4-62x^2-104x-27 \cdots 答$$

(2) $f(x)=(x^2-5)^2-\{2\sqrt{13}(x+1)\}^2$
$=(x^2+2\sqrt{13}x-5+2\sqrt{13})(x^2-2\sqrt{13}-5-2\sqrt{13})$

よって，$f(x)=0$ という方程式は

$$(x^2+2\sqrt{13}x-5+2\sqrt{13})(x^2-2\sqrt{13}-5-2\sqrt{13})=0$$

と変形できるため

$$x=-\sqrt{13}\pm\sqrt{18-2\sqrt{13}},\ \sqrt{13}\pm\sqrt{18+2\sqrt{13}}\quad\cdots(☆)$$

ここで $\begin{cases}(u+v)^2=18+2\sqrt{13}\\ (u-v)^2=18-2\sqrt{13}\end{cases}$

より，(☆)は

$$x=-\sqrt{13}\pm\sqrt{(u-v)^2},\ \sqrt{13}\pm\sqrt{(u+v)^2}$$

すなわち

$$x=-\sqrt{13}\pm|u-v|,\ \sqrt{13}\pm|u+v|$$

これより，$f(x)=0$ の解は

$$x=\begin{cases}-\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}\\ -\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}\\ \sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}\\ \sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}\end{cases}\quad\cdots(★)$$

$f(x)=0$ は4次方程式であり，(★)の相異なる4個の実数解以外もつことはない。

以上から，題意の8個の実数のうち，$f(x)=0$ の解となるものは(★)の4つであり，それ以外の4つは解ではない。

(3)

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}} \\
\beta &= \sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}} \\
\gamma &= -\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}} \\
\delta &= -\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}
\end{aligned}$$

とする。

$\sqrt{64}<\sqrt{68}<\sqrt{81}$ ，すなわち $8<2\sqrt{17}<9$ であることに注意すると

$$\sqrt{9-2\sqrt{17}}<\sqrt{13}<\sqrt{9+2\sqrt{17}}$$

これより，

$$\alpha-\gamma=2\left(\sqrt{13}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}\right)>0$$

$$\begin{aligned}
\gamma-\beta &= -2\sqrt{13}+2\sqrt{9+2\sqrt{17}} \\
&= 2\left(\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{13}\right)>0
\end{aligned}$$

$$\beta-\delta=2\left(\sqrt{13}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}\right)>0$$

となるため，$\alpha>\gamma>\beta>\delta$

以上から，$f(x)=0$ の解を大きい順に並べると

$$\begin{aligned}
&\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}} \\
&-\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}} \\
&\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}} \\
&-\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}
\end{aligned}$$

【総括】

目へのストレスがハンパないですね。

機械的処理ではなく，思考力や洞察力が問われる本格的な問題です。

試験場じゃなくてもシンドイのですから，試験場だとなおさらキツイでしょう。