４次方程式の解法

4 次方程式 $x^4-20x^2-8\sqrt{2}x+32=0$ …… $(*)$ のある解を見つけたい。次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $(*)$ は区間 $(4, 5)$ に解をもつことを示せ。

(2) (1) での解をオイラー (Leonhard Euler) の方法で求めよう。
p, q, r を正の実数として $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ （$p, q, r>0$） とおく。まず補助変数 f, g, h

$$f=p+q+r,\ g=pq+pr+qr,\ h=pqr$$

を導入する。x^2, x^4 を計算して

$$x^4-Ax^2-Bx-C=0 \quad \cdots\cdots (**)$$

としたとき，A, B, C を f, g, h を用いて表せ。
次に $(*)$ と $(**)$ が同じ式と仮定して f, g, h を求めよ。

(3) 等式 $(X-p)(X-q)(X-r)=X^3-fX^2+gX-h$ と (2) で得られた f, g, h を用いて 3 次方程式 $X^3-fX^2+gX-h=0$ の 3 つの解 p, q, r を求めよ。

(4) 方程式 $(*)$ の解 $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ を等式

$$\alpha+\beta\pm2\sqrt{\alpha\beta}=(\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta})^2 \quad (\alpha, \beta>0)$$

を用いて簡略化し，それが区間 $(4, 5)$ にあることを示せ。

< ’08 横浜市立大 >

【戦略】

(1) **中間値の定理で即解決です。**

(2) **目がチカチカしますが，ひとまず言われた通り x^2, x^4 を計算していきます。**

細かな計算過程については注釈を入れる形で解説します。

(3) **(2) が解決していれば，$f=10$, $g=17$, $h=2$ と得ているため**

考えるべき 3 次方程式は $X^3-10X^2+17X-2=0$ です。

これは $(X-2)(X^2-8X+1)=0$ と変形できるため

$$X=2,\ 4\pm\sqrt{15}$$

と解くことができます。

(4) **$(*)$ の解を $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ とおいていたことから，(3) の結果を用いて**

$$x=\sqrt{2}+\sqrt{4+\sqrt{15}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}$$

となります。

あとは，この 2 重根号を外すだけです。

正しく外せば，$x=\sqrt{2}+\sqrt{10}$ が得られます。

あとは，これが区間 $(4, 5)$ に入っていることを示せばよく

$$1<\sqrt{2}<1.5,\quad 3<\sqrt{10}<3.5$$

であることから，辺々加えれば $4<\sqrt{2}+\sqrt{10}<5$ を得ます。

【解答】

(1) $f(x)=x^4-20x^2-8\sqrt{2}x+32$ とおく 。

$$f(4)=-32-32\sqrt{2}<0,\ f(5)=157-40\sqrt{2}>157-40\cdot2>0$$

$f(x)$ は連続であるため，中間値の定理から $f(x)=0$ となる x は $4<x<5$ の範囲に少なくとも 1 つ存在する。

(2)
$$\begin{aligned} x^2&=(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})^2\\ &=p+q+r+2(\sqrt{pq}+\sqrt{qr}+\sqrt{rp})\\ &=f+2(\sqrt{pq}+\sqrt{qr}+\sqrt{rp}) \quad \cdots ① \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{pq}+\sqrt{qr}+\sqrt{rp})^2&=pq+qr+rp+2\sqrt{pqr}(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})\\ &=g+2\sqrt{h}\,x \end{aligned}$$

ゆえに，$\sqrt{pq}+\sqrt{qr}+\sqrt{rp}=\sqrt{g+2\sqrt{h}\,x}$

$(**)$ の形には $\sqrt{x}$ は含まれていないため，$\sqrt{x}$ を含む部分を消したいでしょう。

① に代入して，$x^2=f+2\sqrt{g+2\sqrt{h}\,x}$ …②

$x^4=f^2+4f\sqrt{g+2\sqrt{h}\,x}+4(g+2\sqrt{h}\,x)$ …③

②×$2f$ より $2fx^2=2f^2+4f\sqrt{g+2\sqrt{h}\,x}$ …④

③，④ から $4f\sqrt{g+2\sqrt{h}\,x}$ を消去して

$$x^4=f^2+2fx^2-2f^2+4(g+2\sqrt{h}\,x)$$

これを整理すると

$$x^4-2fx^2-8\sqrt{h}\,x+f^2-4g=0$$

ゆえに，$A=2f$，$B=8\sqrt{h}$，$C=-f^2+4g$ …㊟

また，$(*)$ と $(**)$ が同じ式と仮定すると

$$2f=20,\ \sqrt{h}=\sqrt{2},\ f^2-4g=32$$

これら 3 式から $f=10$, $g=17$, $h=2$ …㊟

(3) 3 次方程式 $X^3-fX^2+gX-h=0$ は (2) の結果から

$$X^3-10X^2+17X-2=0$$

これは，$(X-2)(X^2-8X+1)=0$ と変形でき，

$$X=2,\ 4\pm\sqrt{15}$$

ゆえに，求める 3 次方程式の解 p, q, r は順不同で

$$\{p, q, r\}=\{2,\ 4+\sqrt{15},\ 4-\sqrt{15}\} \quad \cdots ㊟$$

(4)
$$\sqrt{4\pm\sqrt{15}}=\sqrt{\frac{8\pm2\sqrt{15}}{2}}=\frac{\sqrt{(\sqrt5\pm\sqrt3)^2}}{\sqrt2}=\frac{\sqrt5\pm\sqrt3}{\sqrt2}=\frac{\sqrt{10}\pm\sqrt6}{2}\ (\text{複号同順})$$

よって，(*) の解を $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ とおいていたことから

$$\begin{aligned}x&=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}\\&=\sqrt2+\frac{\sqrt{10}+\sqrt6}{2}+\frac{\sqrt{10}-\sqrt6}{2}\\&=\sqrt2+\sqrt{10}\end{aligned}$$

$1^2<2<(1.5)^2\ (=2.25)$，$3^2<10<(3.5)^2\ (=12.25)$ で，

$$1<\sqrt2<1.5,\quad 3<\sqrt{10}<3.5$$

だから，辺々加えると

$$4<\sqrt2+\sqrt{10}<5$$

以上から (*) の解の 1 つは $x=\sqrt2+\sqrt{10}$ であり，それは区間 $(4, 5)$ に存在する。

【戦略 2】(2) について

$$\begin{aligned}x^2&=(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})^2\\&=p+q+r+2(\sqrt{pq}+\sqrt{qr}+\sqrt{rp})\\&=f+2(\sqrt{pq}+\sqrt{qr}+\sqrt{rp})\ \cdots①\end{aligned}$$

を得た後 .

$$(x^2-f)^2=4(\sqrt{pq}+\sqrt{qr}+\sqrt{rp})^2$$

と見るとスムーズです。

【解 2】(2) について　部分的別解

$$\begin{aligned}x^2&=(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})^2\\&=p+q+r+2(\sqrt{pq}+\sqrt{qr}+\sqrt{rp})\\&=f+2(\sqrt{pq}+\sqrt{qr}+\sqrt{rp})\end{aligned}$$

これより，$x^2-f=2(\sqrt{pq}+\sqrt{qr}+\sqrt{rp})$ であり

$$\begin{aligned}(x^2-f)^2&=4(\sqrt{pq}+\sqrt{qr}+\sqrt{rp})^2\\&=4\{pq+qr+rp+2\sqrt{pqr}(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})\}\\&=4(g+2\sqrt{h}\,x)\end{aligned}$$

ゆえに，$x^4-2fx^2+f^2=4g+8\sqrt{h}\ x$

すなわち　$x^4-2fx^2-8\sqrt{h}\,x+f^2-4g=0$

よって，$A=2f$，$B=8\sqrt{h}$，$C=-f^2+4g$　$\cdots$答

【総括】

誘導に従っているうちに終わってしまった感がありますが，4 次方程式の解を求める歴史の一端に触れるという奥深い問題です。

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

一般的な 4 次方程式について考えてみます。

まず，4 次方程式は

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

というように，x^4 の係数を 1 の形に帰着できます。

ここで，$x=X+\dfrac{a}{4}$ とおくことにより，

$$X^4-AX^2-BX-C=0$$

という形まで帰着できます。

つまり，

$$x^4-Ax^2-Bx-C=0\ \cdots(☆)$$

という形の解が見つかれば解決ということに他なりません。

今，(☆) の解の 1 つを $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ と表すことにします。

このとき，この p，q，r を用いた

$$(x-\sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r})(x-\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})(x+\sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r})(x+\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r})=0$$

という $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ を解の 1 つにもつ 4 次方程式は

$$x^4-2(p+q+r)x^2-8\sqrt{pqr}\,x+p^2+q^2+r^2-2(pq+qr+rp)=0$$

と変形できるため，$\begin{cases}2(p+q+r)=A\\8\sqrt{pqr}=B\\-(p^2+q^2+r^2)+2(pq+qr+rp)=C\end{cases}$

となるような p，q，r が見出せればよいわけです。

これについては 3 文字の対称式の扱いから，

$$p+q+r,\ pq+qr+rp,\ pqr$$

の情報を得て，3 次方程式の解と係数の関係を用いることにより，

与えられた A，B，C の情報から，p，q，r を得ることは可能と言えます。

つまり，(☆) の解の 1 つを $X=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ と表したとき

$$\begin{cases}2(p+q+r)=A\\8\sqrt{pqr}=B\\-(p^2+q^2+r^2)+2(pq+qr+rp)=C\end{cases}$$

となるような p，q，r を考えれば，(☆) の解として

$x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$，$\sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r}$，$-\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r}$，$-\sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r}$

が得られるということになります。