a, b $(a<b)$ は実数の定数とする。 $-\infty<x<\infty$ で定義された関数 $f(x)$ は，次の [i], [ii] をみたすものとする。

[i]　$y=f(x)$ のグラフは，直線 $x=a$ に関して対称である。

[ii]　$y=f(x)$ のグラフは，直線 $x=b$ に関して対称である。

このとき，

(1)　定数関数以外で，このような関数 $f(x)$ の例を１つ求めよ。

(2)　$f(x)$ が整式であれば，$f(x)$ は定数であることを示せ。

＜ '99 京都府立医科大 ＞

【戦略】

(1)　**先に (2) の結論を見てみると，整式 (多項式) では見つからないはずです。**

指数関数，対数関数，三角関数，分数関数，無理関数，…

これらの中で，対称軸が２本あるようなグラフをもつものと言えば，

三角関数

でしょう。

$x=0$, π **を対称軸にもつ** $y=\cos x$ **をベースに，** $x=a$, b **が対称軸となるように適切に「幅の倍率調整」，「平行移動」を施すことを考えていきましょう。**

(2)　**大枠の路線としては背理法が第一感です。**

$f(x)$ **が１次以上の整式であると仮定します。**

$y=f(x)$ **が** $x=k$ **に関して対称であるということは**

$$f(2k-x)=f(x)$$

ということです。

つまり， $\begin{cases} f(2a-x)=f(x) \\ f(2b-x)=f(x) \end{cases}$ **ということなので，**

$f(2b-x)-f(2a-x)=0$ **が** x **の恒等式であることになります。**

$f(x)$ **を** n **次式** ($n=1, 2, \cdots$) **と仮定し，**

$$f(x)=c_n x^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1 x+c_0 \quad (c_n \neq 0)$$

とおいてやります。

$f(2b-x)-f(2a-x)$ **の係数について見ていくことになりますが，** x^n **の項は消えてしまうため，次の** x^{n-1} **の係数を見ていくことを考えます。**

【解答】

(1)　直線 $x=0$, $x=\pi$ に関して対称な曲線として $y=\cos x$ がある。

これを２本の対称軸 $x=a$, b に対応するように倍率調整と平行移動を施すことを考える。

２本の対称軸の幅は π であり，この幅が $b-a$ となるように x 軸方向に拡大 (縮小) する。

つまり，x 軸方向に $\dfrac{b-a}{\pi}$ 倍拡大 (縮小) すると $y=\cos\dfrac{\pi}{b-a}x$

これにより，対称軸は $x=0$, $x=b-a$

この対称軸 $x=0$, $x=b-a$ を $x=a$, $x=b$ に重ねるために，x 軸方向に a だけ平行移動させせると

$$y=\cos\frac{\pi}{b-a}(x-a)$$

これにより，対称軸は $x=a$, b となる。

以上から，条件 [i], [ii] を満たす $f(x)$ の一例は

$$f(x)=\cos\frac{\pi}{b-a}(x-a) \cdots \text{答}$$

(2)　$f(x)$ の次数が１以上であると仮定し，

$$f(x)=c_n x^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1 x+c_0$$

とおく。

(ただし，n は正の整数，c_0, c_1, $\cdots$, c_n は実数で $c_n \neq 0$)

条件 [i] $\Leftrightarrow$ 任意の実数 x に対し，$f(2a-x)=f(x)$ $\cdots$ ①

条件 [ii] $\Leftrightarrow$ 任意の実数 x に対し，$f(2b-x)=f(x)$ $\cdots$ ②

$f(x)$ が ①, ② を満たしているため

$$f(2b-x)-f(2a-x)=0 \text{ が } x \text{ の恒等式} \cdots (*)$$

$$f(2b-x)=c_n(2b-x)^n+c_{n-1}(2b-x)^{n-1}+\cdots+c_1(2b-x)+c_0$$
$$f(2a-x)=c_n(2a-x)^n+c_{n-1}(2a-x)^{n-1}+\cdots+c_1(2a-x)+c_0$$

$f(2b-x)-f(2a-x)$ の x^{n-1} を含む項は

$$c_n\{(2b-x)^n-(2a-x)^n\}$$

を整理した部分から生じるので，x^{n-1} を含む項は二項定理から

$$c_n\{{}_n\mathrm{C}_1(2b)(-x)^{n-1}-{}_n\mathrm{C}_1(2a)(-x)^{n-1}\}$$

であり，x^{n-1} の係数は

$$\begin{aligned} c_n\{(-1)^{n-1}\cdot 2nb-(-1)^{n-1}\cdot 2na\} &= c_n\{(-1)^{n-1}\cdot 2n(b-a)\} \\ &= 2nc_n(-1)^{n-1}(b-a) \end{aligned}$$

$(*)$ より，x^{n-1} の係数は 0 であるため

$$2nc_n(-1)^{n-1}(b-a)=0$$

しかし，$n>0$, $c_n \neq 0$, $(-1)^{n-1} \neq 0$, $b-a>0$ であるため，矛盾する。

したがって，$f(x)$ の次数は１以上とはならない。

一方，$f(x)$ が定数関数であるとき，[i], [ii] が成り立つのは自明。

以上から，$f(x)$ が整式であるとき，$f(x)$ は定数関数である。

【総括】

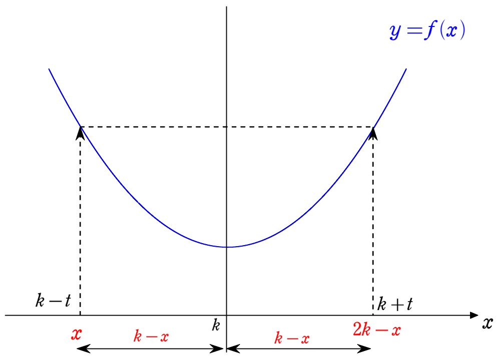
こういった論証については慣れていない受験生も多く，アタフタして終わってしまう方が多数を占めると思います。

頭に血が昇っている状態だと，下手をすると (1) の周期関数すら見失うこともあり得るでしょう。

$y=f(x)$ が $x=k$ に関して対称であるということを

$$f(2k-x)=f(x)$$

と翻訳する力や，逆にこの関係式から $x=k$ に関する対称性を喚起することとは難関大を目指すにあたってはマストスキルでしょう。



$f(k-t)=f(k+t)$ が任意の実数 t で成立するというほうが分かりやすいかもしれません。

この関係式から，$k-t=x$ とすると，$f(x)=f(2k-x)$ を得るわけです。