次の問いに答えよ。

(1) x に関する次数が 2006 の多項式 $Q(x)$ に対して，次の条件

$$Q(0)=-1,\ Q(1)=Q(2)=\cdots\cdots=Q(2006)=0$$

が成立しているとき，$Q(2007)$ の値を求めよ。

(2) x に関する次数が 2005 の多項式 $P(x)$ に対して，次の条件

$$P(k)=\frac{1}{k}\ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 2006)$$

が成立しているとき，$P(2007)$ の値を求めよ。

＜ '05 早稲田大 ＞

【戦略】

(1) **強力な条件 $Q(1)=Q(2)=\cdots\cdots=Q(2006)=0$ が因数定理に直結します。**

これにより，$Q(x)=A(x-1)(x-2)\cdots(x-2006)$ と表せることになりますが，A を特定する条件が $Q(0)=-1$ です。

(2) $P(1)=1$，$P(2)=\dfrac{1}{2}$，$P(3)=\dfrac{1}{3}$，……，$P(2006)=\dfrac{1}{2006}$

という条件の使い方をどうするかですが，(1) の活用を考えると

1 ～ 2006 の何を代入しても 0

というシチュエーションを作りたいわけです。

そうなると，$kP(k)-1=0$ というように見たくなると思います。

そこで，$R(x)=xP(x)-1$ という関数 $R(x)$ の設定をします。

$R(x)$ は 2006 次式で

$$R(0)=-1,\ R(1)=R(2)=\cdots\cdots=R(2006)=0$$

という (1) の利用条件を満たしていますから，$R(2007)$ が求まり，そこから $P(2007)$ も求まります。

【解答】

(1) $Q(1)=Q(2)=\cdots\cdots=Q(2006)=0$ より因数定理から 2006 次式 $Q(x)$ は A を定数として

$$Q(x)=A(x-1)(x-2)\cdots(x-2006)$$

と表せる。

条件 $Q(0)=-1$ より

$$A\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot\cdots\cdots\cdot(-2006)=-1$$

ゆえに，$A=-\dfrac{1}{2006!}$

よって，$Q(x)=-\dfrac{1}{2006!}(x-1)(x-2)\cdots(x-2006)$

これより，

$$Q(2007)=-\frac{1}{2006!}\cdot2006\cdot2005\cdot\cdots\cdots\cdot1$$

$$=-1\ \cdots 答$$

(2) $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2006$ に対して

$$kP(k)-1=0$$

ここで，$R(x)=xP(x)-1$ とおくと，$P(x)$ は 2005 次式より $R(x)$ は 2006 次式 …①

今，$\begin{cases} R(0)=-1 \\ R(k)=0\ \ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2006) \end{cases}$ …②

①，② および (1) の結果から，$R(2007)=-1$

ゆえに，$2007P(2007)-1=-1$ を得る。

これより，$P(2007)=0$ …答

【総括】

(2) では (1) の活用がカギとなります。

また，難関大受験生には余計なお世話かもしれませんが，因数定理を用いるときに最高次の係数を落とすウッカリミスには注意しましょう。