$\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{z}$ が 0 以上 2 以下の実数であるような複素数 $z\ (z \fallingdotseq 0)$ を表す複素数平面上の点の集合を，式で表し，図示せよ。

＜ '98 北海道大 ＞

【戦略 1】

$\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{z}$ **が** $\begin{cases}\text{実数であること}\\ 0\ \text{以上}\ 2\ \text{以下であること}\end{cases}$ **という 2 つのハードルについて考えていきます。**

内容は例題同様なので割愛します。

【解 1】

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\ (r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおく。

このとき，$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}$
$=\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\cos\theta-i\sin\theta}{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)}$
$=\dfrac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$

よって，$\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{r}{2}(\cos\theta+i\sin\theta)+\dfrac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$
$=\left(\dfrac{r}{2}+\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta+i\left(\dfrac{r}{2}-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta$

$\dfrac{z}{4}+\dfrac{4}{z}$ が実数となるとき，$\left(\dfrac{r}{2}-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta=0$

$$\frac{r}{2}-\frac{1}{r}=0\ \cdots①\ \text{または}\ \sin\theta=0\ \cdots②$$

① のとき $r^2-2=0$ で，$r>0$ だから $r=\sqrt{2}$

② のとき，$\theta=0,\ \pi$

$\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{z}$ が実数であるとき，その実数は実部である $\left(\dfrac{r}{2}+\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta$ に等しい。

(i)　$r=\sqrt{2}$ のとき　　$2\cdot\dfrac{2}{3\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\left(\dfrac{r}{2}+\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta=\sqrt{2}\cos\theta$ であり，$0\leqq\sqrt{2}\cos\theta\leqq 2$

$\cos\theta\leqq 1$ も考えると，$0\leqq\cos\theta\leqq 1$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi\leqq\theta<2\pi$

(ii)　$\theta=0$ のとき

$\left(\dfrac{r}{2}+\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta=\dfrac{r}{2}+\dfrac{1}{r}$ であり，$0\leqq\dfrac{r}{2}+\dfrac{1}{r}\leqq 2$

$r>0$ より，左側の不等式は必ず成立する。

右側の不等式について整理すると $r^2-4r+2\leqq 0$

これより，$2-\sqrt{2}\leqq r\leqq 2+\sqrt{2}$

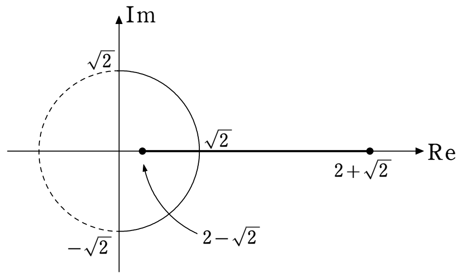
(iii)　$\theta=180^\circ$ のとき

$\left(\dfrac{r}{2}+\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta=-\dfrac{r}{2}-\dfrac{1}{r}<0$ より題意を満たすことはない。

以上 (i), (ii), (iii) より，点 z の集合を式で表すと

$$\begin{cases} z \text{ は実数 } 2-\sqrt{2} \leqq z \leqq 2+\sqrt{2} \\ \text{半円 } |z|=\sqrt{2} \ (\text{ 実部 } \mathrm{Re}(z) \geqq 0 \ ) \end{cases} \cdots \text{答}$$

であり，図示すると次の (図 1) のようになる。



(図 1)

【戦略 2】

$\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{z}$ が実数であることを $\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{z}=\overline{\left(\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{z}\right)}$ と翻訳してもよいでしょう。

【解 2】

$\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{z}$ は実数であるため，

$$\frac{z}{2}+\frac{1}{z}=\overline{\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{z}\right)}$$

$$\frac{z}{2}+\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{2}+\frac{1}{\overline{z}}$$

$$z^2\overline{z}+2\overline{z}=z\overline{z}^2+2z$$

$$z\overline{z}\,(z-\overline{z})-2\,(z-\overline{z})=0$$

$$(z-\overline{z})\,(z\overline{z}-2)=0$$

$$(z-\overline{z})\,(|z|^2-2)=0$$

$$z=\overline{z} \quad \text{または} \quad |z|=\sqrt{2}$$

[1]：$z=\overline{z}$，すなわち z が実数のとき

$0 \leqq \dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{z} \leqq 2$，すなわち $0 \leqq \dfrac{z^2+2}{2z} \leqq 2$

左側の不等号は $z>0$ で成立し，このとき右側の不等式より

$z^2-4z+2 \leqq 0$ であり，これを解くと
$2-\sqrt{2} \leqq z \leqq 2+\sqrt{2}$（これは $z>0$ を満たしている）

[2]：$|z|=\sqrt{2}$ のとき

$z=\sqrt{2}\,(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくと，

$$\frac{z}{2}+\frac{1}{z}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta-i\sin\theta)$$
$$=\sqrt{2}\cos\theta$$

よって，$0 \leqq \dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{z} \leqq 2$ が成り立つとき，$0 \leqq \sqrt{2}\cos\theta \leqq 2$

すなわち，$0 \leqq \cos\theta \leqq \sqrt{2}$ であり，$\cos\theta \leqq 1$ も考えると

$0 \leqq \cos\theta \leqq 1$ を得て，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi \leqq \theta < 2\pi$

【総括】

実部虚部を持ち出せば，実数であることを翻訳するのは容易いでしょう。

ただ，一般的には計算量が膨らみがちです。

複素数平面の問題においては様々な解法があり，翻訳の仕方一つで労力が変わってくる事も多々あります。