z を 0 でない複素数とする。

(1) z の絶対値を r，偏角を $\theta\,(0^\circ \leqq \theta < 360^\circ)$ とするとき，$\dfrac{z}{4}+\dfrac{4}{z}$ が実数となるような r と θ を求めよ。

(2) $\dfrac{z}{4}+\dfrac{4}{z}$ が実数で，その値が 0 以上 4 以下であるような点 z はどのような図形を描くか。複素数平面上に図示せよ。

< '04 岡山大 >

【戦略】

(1) **条件から，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ と極形式で表せます。**

このとき，$\dfrac{1}{z}\,(=z^{-1})=\dfrac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$ となりますから

$$\frac{z}{4}+\frac{4}{z}=\frac{r}{4}(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{4}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$$
$$=\left(\frac{r}{4}+\frac{4}{r}\right)\cos\theta+i\left(\frac{r}{4}-\frac{4}{r}\right)\sin\theta$$

となり，これが実数となるときを考えることになります。

もちろんその条件は虚部が 0 となることであり，$\left(\dfrac{r}{4}-\dfrac{4}{r}\right)\sin\theta=0$ ということになります。

(2) $\dfrac{z}{4}+\dfrac{4}{z}$ **が** $\begin{cases}\text{実数であること}\\ 0\text{ 以上 }4\text{ 以下であること}\end{cases}$ **という 2 つのハードルを超えてくるときを考えますが，実数であるための条件は (1) で考えました。**

$\dfrac{z}{4}+\dfrac{4}{z}$ **が実数となるとき，その実数は実部である $\left(\dfrac{r}{4}+\dfrac{4}{r}\right)\cos\theta$ ということになります。**

【解答】

(1) z の絶対値が r，偏角が θ なので，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

このとき，
$$\frac{1}{z}=\frac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}$$
$$=\frac{1}{r}\cdot\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)}$$
$$=\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

よって，
$$\frac{z}{4}+\frac{4}{z}=\frac{r}{4}(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{4}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$$
$$=\left(\frac{r}{4}+\frac{4}{r}\right)\cos\theta+i\left(\frac{r}{4}-\frac{4}{r}\right)\sin\theta$$

$\dfrac{z}{4}+\dfrac{4}{z}$ が実数となるとき，$\left(\dfrac{r}{4}-\dfrac{4}{r}\right)\sin\theta=0$

$$\frac{r}{4}-\frac{4}{r}=0 \cdots ① \quad \text{または} \quad \sin\theta=0 \cdots ②$$

① のとき $r^2-16=0$ で，$r>0$ だから $r=4$

② のとき，$\theta=0^\circ,\ 180^\circ$

以上から，α を $0^\circ \leqq \alpha < 360^\circ$ を満たす任意の角，k，ℓ を任意の正の実数として

$$(r,\ \theta)=(4,\ \alpha),\ (k,\ 0^\circ),\ (\ell,\ 180^\circ) \cdots \text{答}$$

(2) $\dfrac{z}{4}+\dfrac{4}{z}$ が実数であるとき，その実数は実部である $\left(\dfrac{r}{4}+\dfrac{4}{r}\right)\cos\theta$ に等しい。

(i) $r=4$ のとき

$\left(\dfrac{r}{4}+\dfrac{4}{r}\right)\cos\theta=2\cos\theta$ であり，$0\leqq 2\cos\theta\leqq 4$

$\cos\theta\leqq 1$ も考えると，$0\leqq\cos\theta\leqq 1$

$0^\circ\leqq\theta<360^\circ$ の範囲では $0^\circ\leqq\theta\leqq 90^\circ,\ 270^\circ\leqq\theta<360^\circ$

(ii) $\theta=0^\circ$ のとき

$\left(\dfrac{r}{4}+\dfrac{4}{r}\right)\cos\theta=\dfrac{r}{4}+\dfrac{4}{r}$ であり，$0\leqq\dfrac{r}{4}+\dfrac{4}{r}\leqq 4$

$r>0$ より，左側の不等式は必ず成立する。

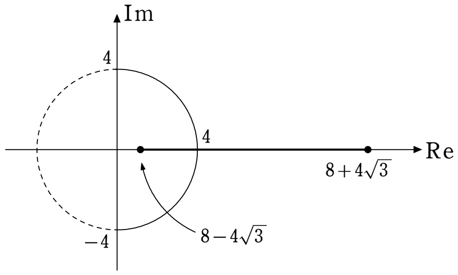
右側の不等式について整理すると $r^2-16r+16\leqq 0$

これより，$8-4\sqrt{3}\leqq r\leqq 8+4\sqrt{3}$

(iii) $\theta=180^\circ$ のとき

$\left(\dfrac{r}{4}+\dfrac{4}{r}\right)\cos\theta=-\dfrac{r}{4}-\dfrac{4}{r}<0$ より題意を満たすことはない。

以上 (i), (ii), (iii) より，z の動き得る部分は，次の (図 1) のようになる。



(図 1)

【総括】

> z を 0 出ない複素数とし，$0 \leqq \dfrac{z}{4}+\dfrac{4}{z} \leqq 4$ となる z を複素数平面に図示せよ。

という問題だったら単純に分母を払っておしまいにしてしまう受験生も多く，正答率は下がるでしょう。

基本的に虚数には大小という概念がありません。

例えば，i と 1 の大小を考えようとしてみます。
$i>1$ … ① と仮定すると，$i>0$ でもあるため，① の両辺に i をかけ

$i^2>i$，すなわち $i<-1$ となり矛盾します。

$0<i<1$ と仮定すると，$0<i^2<i$ で，$0<-1$ となり矛盾します。

$i<-1$ … ② と仮定すると，$i<0$ でもあるため，② の両辺に i をかけ
$i^2>-i$，すなわち $i>1$ となり矛盾します。

つまり，どう仮定しても矛盾するため，i と 1 の大小を考えることができないわけです。

先ほどの問題では $0 \leqq \dfrac{z}{4}+\dfrac{4}{z} \leqq 4$ という不等号で表現されている時点で $\dfrac{z}{4}+\dfrac{4}{z}$ が実数であるということは暗黙の了解ということになるわけです。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

なお，本問の流れでは極形式で考えるのが当然でしたが，(1) については

$$\frac{z}{4}+\frac{4}{z}=\overline{\left(\frac{z}{4}+\frac{4}{z}\right)}$$

が成り立てばよいと考えてもよいでしょう。

これより $\dfrac{z}{4}+\dfrac{4}{z}=\dfrac{\overline{z}}{4}+\dfrac{4}{\overline{z}}$ であり，両辺に $4z\overline{z}$ をかけると

$$z^2\overline{z}+16\overline{z}=z\overline{z}^2+16z$$

$$z\overline{z}(z-\overline{z})-16(z-\overline{z})=0$$

$$(z-\overline{z})(z\overline{z}-16)=0$$

$$(z-\overline{z})(|z|^2-16)=0$$

$$z=\overline{z} \text{ または } |z|=4$$

$z=\overline{z}$ のときは z が実数であるため，z の偏角 θ は $\theta=0^\circ$，180°

$|z|=4$ のときは，z の大きさが 4 であるため，絶対値 r は $r=4$

となります。