自然数 n をそれより小さい自然数の和として表すことを考える。ただし，$1+2+1$ と $1+1+2$ のように和の順序が異なるものは別の表し方とする。

例えば，自然数 2 は $1+1$ の 1 通りの表し方ができ，自然数 3 は $2+1$，$1+2$，$1+1+1$ の 3 通りの表し方ができる。

(1) 自然数 4 の表し方は何通りあるか。

(2) 自然数 5 の表し方は何通りあるか。

(3) 2 以上の自然数 n の表し方は何通りあるか。

＜ '02 大阪教育大 ＞

【戦略 1】

(1) **「n より小さい自然数の和として」というのが微妙に厄介で，n そのものも許すことにすれば**

1 … 1
2 … $1+1$，2
3 … $1+1+1$，$1+2$，$2+1$，3

$$4 \cdots \begin{cases} 1+\bigcirc \text{ タイプ}：1+(1+1+1),\ 1+(1+2),\ 1+(2+1),\ 1+3 \\ 2+\bigcirc \text{ タイプ}：2+(1+1),\ 2+2 \\ 3+\bigcirc \text{ タイプ}：3+1 \\ 4 \text{ そのもの} \end{cases}$$

とすんなり数えられます。

ただし，本来は 4 そのものは除くため，求める表し方は 7 通りです。

(2) **(1) で気が付いたかもしれませんが，**

4 が 8 通りで表せることから $1+\bigcirc$ というものは 8 通り
3 が 4 通りで表せることから $2+\bigcirc$ というものは 4 通り
⋮
と，既出の情報を活かすことを考えていくと

$$5 \cdots \begin{cases} 1+\bigcirc \text{ タイプ}：8 \text{ 通り} \\ 2+\bigcirc \text{ タイプ}：4 \text{ 通り} \\ 3+\bigcirc \text{ タイプ}：2 \text{ 通り} \\ 4+\bigcirc \text{ タイプ}：1 \text{ 通り} \\ 5 \text{ そのもの}：1 \text{ 通り} \end{cases}$$

という，計 16 通りあります。

ただし，本来は 5 そのものは許されないので，15 通りが求めるものです。

(3) (1)，(2) **の要領に倣えば，**
$$\begin{cases} 1+(\text{和が } n-1) \\ 2+(\text{和が } n-2) \\ \quad\vdots \\ n-1+(\text{和が } 1) \\ n \text{ そのもの} \end{cases}$$

というように分類していけばよいことが分かります。

以前の情報を次に活かすという要領からして「漸化式」の出番です。

ひとまず n をそれ「以下」の自然数の和として表す方法を a_n 通りなどと設定し，$n+1$ の和分割の方法 a_{n+1} について考えていきます。

【解 1】

自然数 n を，n 以下の自然数の和として表す方法を a_n 通りとする。

1 … 1
2 … $1+1$，2
3 … $1+1+1$，$1+2$，$2+1$，3

より，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=4$

(1) 本来 4 そのものは許されないので，求めるものは a_4-1 通り

$$4 \cdots \begin{cases} 1+\bigcirc \text{ タイプ}：a_3 \text{ 通り} \\ 2+\bigcirc \text{ タイプ}：a_2 \text{ 通り} \\ 3+\bigcirc \text{ タイプ}：a_1 \text{ 通り} \\ 4 \text{ そのもの}：1 \text{ 通り} \end{cases}$$

$a_4=a_3+a_2+a_1+1=4+2+1+1=8$

よって，$a_4-1=7$【通り】…答

(2)
$$5 \cdots \begin{cases} 1+\bigcirc \text{ タイプ}：a_4 \text{ 通り} \\ 2+\bigcirc \text{ タイプ}：a_3 \text{ 通り} \\ 3+\bigcirc \text{ タイプ}：a_2 \text{ 通り} \\ 4+\bigcirc \text{ タイプ}：a_1 \text{ 通り} \\ 5 \text{ そのもの}：1 \text{ 通り} \end{cases}$$

$a_5=a_4+a_3+a_2+a_1+1=8+4+2+1+1=16$

本来 5 そのものは許されないので，$16-1=15$【通り】…答

(3) $n+1$ の和分割の方法について

$$\begin{cases} 1+\bigcirc \text{ タイプ}：a_n \text{ 通り} \\ 2+\bigcirc \text{ タイプ}：a_{n-1} \text{ 通り} \\ \quad\vdots \\ n+\bigcirc：a_1 \text{ 通り} \\ n+1 \text{ そのもの}：1 \text{ 通り} \end{cases}$$

ゆえに，
$$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+1$$

$n \geqq 2$ のとき $\begin{cases} a_{n+1}=a_n+a_{n-1}+\cdots\cdots+a_1+1 \\ a_n= \qquad a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_1+1 \end{cases}$

辺々引くと，$a_{n+1}-a_n=a_n$

ゆえに，$a_{n+1}=2a_n$

したがって，$a_n=2^{n-1}$ $(n \geqq 2)$

ただし，これは $n=1$ のときも成立する

以上から，$a_n=2^{n-1}$ であり，本問における n の和分割においては n そのものは許されないので，求める表し方の総数は

$$a_n-1=2^{n-1}-1 \text{【通り】…答}$$

【戦略 2】

少々経験に基づく見方をしますが，○ と仕切りの並べ方と対応させるという方法も考えられます。

例えば (1) では，○ を 4 個並べ，仕切りを入れていきます。

今回は 0 を使うことは許されないので

$$○_{\wedge}○_{\wedge}○_{\wedge}○$$

という隙間に仕切りを入れていきます。

例えば，○|○　○|○ であれば，$1+2+1$ という分割に対応します。

仕切りを 1 本しか使わないのであれば ${}_3\mathrm{C}_1$ 通り
仕切りを 2 本しか使わないのであれば ${}_3\mathrm{C}_2$ 通り
仕切りを 3 本しか使わないのであれば ${}_3\mathrm{C}_3$ 通り

という合計 ${}_3\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_3=7$【通り】ということになります。

(3) の一般論についても同様です。

【解 2】(3) について

n 個の ○を仕切りで区切ることにより，いくつかの領域に分割し，
各領域に含まれる○の個数の和として n を分割する。

$$\overbrace{○_{\wedge}○_{\wedge}○_{\wedge}○\quad\cdots\cdots\cdots\quad○_{\wedge}○}^{n\text{ 個}}$$

仕切りを 1 本しか使わないとき，${}_{n-1}\mathrm{C}_1$ 通り
仕切りを 2 本しか使わないとき，${}_{n-1}\mathrm{C}_2$ 通り
⋮
仕切りを $n-1$ 本しか使わないとき，${}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}$ 通り

ゆえに，

二項定理

$$\begin{aligned}{}_{n-1}\mathrm{C}_1+{}_{n-1}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}&=(1+1)^{n-1}-{}_{n-1}\mathrm{C}_0\\&=2^{n-1}-1\text{【通り】}\cdots\text{答}\end{aligned}$$

【総括】

実験していくと

既出の分割を利用すれば次の分割が得られる

という要領がつかめると思います。

漸化式の導入については自分で嗅ぎ取る必要があり、その分のハードルを超えられるかは差が付く要素でしょう。

【戦略 2】に基づく○と仕切りの方針については，まさに「分割」というイメージを表したような方針です。

なお，【解 2】ではシグマ計算で仕留めましたが，

> $n-1$ ヵ所の隙間に対して，
>
> 仕切りを入れるか入れないか
>
> という 2 通りの選択肢があると考え，2^{n-1} 通り
>
> ただし，全ての隙間に仕切りを入れない (言わば n 単独 を表す) というのが許されないため，この 1 通りを除く $2^{n-1}-1$ 通り

というように考えてもよいでしょう。