等差数列の和の最大

等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。S_n を大きい順に並べかえると第 3 項まではそれぞれ 22，21，20 となるとき，この数列の一般項 a_n を求めよ。

＜ ’04 群馬大 ＞

【戦略】

等差数列の一般項を把握するにあたり，初項と公差を設定します。

数列 $\{S_n\}$ の上位 3 項が確定することから，S_n には最大値が存在するため，$d>0$ だと題意を満たさないことが分かると思います。
（**$d>0$ だと $\{a_n\}$ は単調増加数列で，十分大きい n に対して $S_n>22$ です。**）

細かな $d=0$ のときも個別検証で潰せばよいでしょう。

なので，$d<0$ であることが確定します。

ここで，$a\leqq 0$ だと常に 0 以下となってしまうため，$a>0$ であることも確定します。

等差数列の和の最大については

a_1

正

a_1+a_2

正

$a_1+a_2+a_3$

正

$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_m$

正

$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_m+a_{m+1}$

負

というように正の項を足しているうちは和は大きくなり，負のものが混ざってくると和は減少していきます。

つまり，正から負に切り替わる瞬間を捉えるのが等差数列の和の最大をとらえるための常套手段です。

今，a_m までが正の項だとすると

$$S_1<S_2<\cdots\cdots<S_{m-1}<S_m\geqq S_{m+1}>S_{m+2}>\cdots\cdots$$

ということになるため，上位 3 項が S_{m-1}，S_m，S_{m+1} となります。

最大は S_m であることになるため，$S_m=22$ が確定します。

S_{m+1}，S_{m-1} についての大小が確定しないため，

$$\begin{cases} S_{m+1}=21 \\ S_{m-1}=20 \end{cases},\quad \begin{cases} S_{m+1}=20 \\ S_{m-1}=21 \end{cases}$$

という場合分けをすることになります。

【解答】

この等差数列の初項を a，公差を d とする。

(i)　$d=0$ のとき

数列 $\{a_n\}$ は定数列で，$a_n=a$

$S_n=na$ であり，

$$\begin{cases} a>0 \text{ のとき } S_n \text{ には最大値が存在しない} \\ a\leqq 0 \text{ のとき } S_n \text{ は常に 0 以下の値} \end{cases}$$

ということになり，いずれの場合も題意を満たすことはない。

(ii)　$d>0$ のとき

S_n に最大値は存在しないため，題意を満たさない。

(i)，(ii) より，題意を満たす数列 $\{a_n\}$ が存在するとしたら $d<0$ となるしかない。

さらに，このとき，$a\leqq 0$ だと S_n は常に 0 以下の値となり題意を満たすことはない。

したがって，$a>0$ かつ $d<0$ として題意の一般項 a_n について考えればよい。

このとき，数列 $\{a_n\}$ は正の値を初項にもつ単調減少数列であり

$$a_1>a_2>\cdots\cdots>a_m>0\geqq a_{n+1}>a_{n+2}>\cdots\cdots \quad \cdots(*)$$

である。

$m=1$ とすると，$a_1>0\geqq a_2>a_3>\cdots\cdots$ より

上位 3 項は S_1，S_2，S_3 で，$S_1\geqq S_2>S_3$ であるため，$S_1=a=22$

$S_2=S_1+a_2=21$ より，$a_2=-1$ であるため，$d=-23$

これより，$a_3=a_2-23=-24$

このことから，$S_3=S_2+a_3=21-24=-3$ となるが，題意を満たさない。

これより，$m\geqq 2$ であり，

$$S_1<S_2<\cdots\cdots<S_{m-1}<S_m\geqq S_{m+1}>S_{m+2}>\cdots\cdots$$

S_{m-1} を扱う以上
$m\geqq 2$ が必要です

であるため，数列 $\{S_n\}$ の上位 3 項は S_{m-1}，S_m，S_{m+1}

この中で最大のものは S_m であるため，$S_m=22$ であることは確定する。

残る可能性は

$$[1]:\begin{cases} S_{m+1}=21 \\ S_{m-1}=20 \end{cases} \qquad [2]:\begin{cases} S_{m+1}=20 \\ S_{m-1}=21 \end{cases}$$

のいずれかの可能性がある。

[1] のとき

$\begin{cases} S_m=22 & \cdots ① \\ S_{m+1}=21 & \cdots ② \\ S_{m-1}=20 & \cdots ③ \end{cases}$ であり，$\begin{cases} ①\text{ より} & \dfrac{(a+a_m)\cdot m}{2}=22 & \cdots ①' \\ ②-①\text{ より} & a_{m+1}=-1 & \cdots ②' \\ ①-③\text{ より} & a_m=2 & \cdots ③' \end{cases}$

$\begin{cases} ①',\ ③'\text{ より} & \dfrac{(a+2)\cdot m}{2}=22 & \cdots ①'' \\ ②'\text{ より} & a+md=-1 & \cdots ②'' \\ ③'\text{ より} & a+(m-1)d=2 & \cdots ③'' \end{cases}$

②″−③″ より，$d=-3$ を得る。

このとき，$\begin{cases} ①''\text{ より } m(a+2)=44 \\ ②''\text{ より } a-3m=-1 \end{cases}$

これら 2 式から，a を消去すると，

$$m\{(3m-1)+2\}=44$$
$$3m^2+m-44=0$$
$$(3m-11)(m+4)=0$$

これを満たす正の整数 m は存在しない。

[2] のとき

$\begin{cases} S_m=22 & \cdots ④ \\ S_{m+1}=20 & \cdots ⑤ \\ S_{m-1}=21 & \cdots ⑥ \end{cases}$ であり，$\begin{cases} ④\text{ より} & \dfrac{(a+a_m)\cdot m}{2}=22 & \cdots ④' \\ ⑤-④\text{ より} & a_{m+1}=-2 & \cdots ⑤' \\ ④-⑥\text{ より} & a_m=1 & \cdots ⑥' \end{cases}$

$\begin{cases} ④',\ ⑥'\text{ より} & \dfrac{(a+1)\cdot m}{2}=22 & \cdots ④'' \\ ⑤'\text{ より} & a+md=-2 & \cdots ⑤'' \\ ⑥'\text{ より} & a+(m-1)d=1 & \cdots ⑥'' \end{cases}$

⑤″−⑥″ より，$d=-3$ を得る。

このとき，$\begin{cases} ④''\text{ より } m(a+1)=44 \\ ⑤''\text{ より } a-3m=-2 \end{cases}$

これら 2 式から a を消去すると，

$$m\{(3m-2)+1\}=44$$
$$3m^2-m-44=0$$
$$(3m+11)(m-4)=0$$

これを満たす正の整数 m は $m=4$

このとき，$a=10$

よって，数列 $\{a_n\}$ は初項 10，公差 -3 の等差数列であり，その一般項 a_n は

$$\begin{aligned} a_n&=10-3(n-1) \\ &=-3n+13 \cdots \boxed{答} \end{aligned}$$

【総括】

とっかかりとなる条件や情報が限られており，論じなければならないことが多く，スタミナが必要です。

各種基本事項が知識レベルでなく，常識レベルで使いこなせることが前提で，その上での運用力が求められています。