

次の関係をみたす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = x^2 + \int_0^1 f(t) e^t dt$$

< '03 武蔵工業大 >

【戦略】

$f(t)e^t$ の原始関数を $F(t)$ とすれば

$$\int_0^1 f(t) e^t dt = \left[F(t) \right]_0^1 = F(1) - F(0) = \text{定数}$$

ということなので, $\int_0^1 f(t) e^t dt = k$ (k は定数) とおくと

$$f(x) = x^2 + k$$

と, $f(x)$ が 2 次式であるという構造が分かります。

そうすると, $\int_0^1 f(t) e^t dt = k$ の中の $f(t)$ が $f(t) = t^2 + k$ と具体的に形が決まるため

$$\begin{aligned} \int_0^1 (t^2 + k) e^t dt &= k \\ \int_0^1 t^2 e^t dt + k \int_0^1 e^t dt &= k \end{aligned}$$

となり, $(k \text{ の式}) = k$ という k の方程式となります。

$\int_0^1 e^t dt$ については問題ないでしょう。

$\int_0^1 t^2 e^t dt$ については多項式と e^t との積の形ということで部分積分による () のなすりつけによって多項式側の次数を落としていく常套手段で処理します。

ダラダラ計算するのも記述が間延びしてしまいますから, 一旦

$$\begin{aligned} \int t^2 (e^t)' dt &= t^2 e^t - \int (2t) e^t dt \\ &= t^2 e^t - \left\{ 2te^t - \int 2e^t \right\} \\ &= t^2 e^t - 2te^t + 2e^t + C \end{aligned}$$

と, 不定積分を余白で計算し,

$$\int_0^1 t^2 e^t dt = \left[t^2 e^t - 2te^t + 2e^t \right]_0^1$$

と, 一気に処理してしまいます。

【解答】

$\int_0^1 f(t) e^t dt$ は定数であるため,

$$\int_0^1 f(t) e^t dt = k \quad \cdots \textcircled{1}$$

とおくと, 与えられた等式から

$$f(x) = x^2 + k \quad \cdots \textcircled{2}$$

と表せる。

① より,

$$\int_0^1 (t^2 + k) e^t dt = k$$

$$\int_0^1 t^2 e^t dt + k \int_0^1 e^t dt = k$$

$$\left[t^2 e^t - 2te^t + 2e^t \right]_0^1 + k \left[e^t \right]_0^1 = k$$

$$(e - 2) + k(e - 1) = k$$

$$k = -1$$

② より

$$f(x) = x^2 - 1 \quad \cdots \textcircled{\text{答}}$$

【総括】

$\int t^2 e^t dt$ のような $\int f(t) e^t dt$ という形の部分積分については

$$\begin{aligned} \int f(t) e^t dt &= f(t) e^t - \int f'(t) e^t dt \\ &= f(t) e^t - \left\{ f'(t) e^t - \int f''(t) e^t dt \right\} \\ &= f(t) e^t - f'(t) e^t + f''(t) e^t - \int f'''(t) e^t dt \\ &\vdots \end{aligned}$$

と規則性があり, そちらを常識化している人も一定数いるかもしれません。

このあたりを答案に前面に押し出す必要はないでしょう。