$x>0$ に対して，連続関数 $f(x)$ は，等式

$$f(x)=2\log x-\int_1^e tf(t)\,dt$$

を満たすものとする。

このとき，$f(x)$ を求めよ。

＜ '17 札幌医科大 ＞

【戦略】

$tf(t)$ の原始関数を $F(t)$ とすれば

$$\int_1^e tf(t)\,dt=\Big[F(t)\Big]_1^e=F(e)-F(1)=\text{定数}$$

ということなので，$\int_1^e tf(t)\,dt=k$ (k は定数) とおくと

$$f(x)=2\log x-k$$

と，$f(x)$ の構造が分かります。

そうなると，$\int_1^e tf(t)\,dt=k$ の中の $f(t)$ が $f(t)=2\log t-k$ と具体的に形が決まるため

$$\int_0^1 t(2\log t-k)\,dt=k$$

$$2\int_1^e t\log t\,dt-k\int_1^e t\,dt=k$$

となり，(k の式)$=k$ という k の方程式となります。

$\int_1^e t\,dt$ については問題ないでしょう。

$\int_1^e t\log t\,dt$ については部分積分によって処理する定番の形です。

部分積分において $\log$ はワガママな奴で $(\quad)'$ の服を着たがりません。

したがって，$\int_1^e\left(\frac{1}{2}t^2\right)'\log t\,dt$ と見て部分積分を行います。

【解答】

$\int_1^e tf(t)\,dt$ は定数であるため，

$$\int_1^e tf(t)\,dt=k\ \cdots ①$$

とおくと，与えられた等式から

$$f(x)=2\log x-k\ \cdots ②$$

と表せる。

① より，

$$\int_1^e t(2\log t-k)=k$$

$$2\int_1^e t\log t\,dt-k\int_1^e t\,dt=k\ \cdots ③$$

ここで，

$$\begin{aligned}\int_1^e t\log t\,dt&=\int_1^e\left(\frac{1}{2}t^2\right)'\log t\,dt\\&=\left[\frac{1}{2}t^2\log t\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{2}t^2\cdot\frac{1}{t}\,dt\\&=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^e\\&=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

③ は

$$2\left(\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}\right)-k\left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^e=k$$

$$\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}-\frac{k}{2}(e^2-1)=k$$

これより $k=1$ を得る。

② より，$f(x)=2\log x-1\ \cdots$ 答

【総括】

定番の話題であるだけに，目の付け所や流れについてはマスターしておきたいところです。

$\int_{\text{定数}}^{\text{定数}}f(t)\,dt$ という形は所詮定数であると見抜く目は勉強することで培っておきましょう。

加えて

$$\int_a^x f(t)\,dt=\Big[F(t)\Big]_a^x=F(x)-F(a)=(x,\ a\ \text{の式})$$

というように，積分区間や積分定数を見て

「定積分を計算したら何の文字が生き残るのか」

についても判断できるようにしましょう。