次の各問に答えよ。

(1) 不定積分 $\int \cos^3 x\, dx$ を求めよ。

(2) 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x)=\cos^2 x+3\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos(x+t)\cos x\, dt$$

＜ '06 宮城教育大 ＞

【戦略】

(1) $\cos^n x$ **の積分においては**

奇数乗 → 1 乗を分離

つまり

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\, dx &= \int \cos^2 x\, \cos x\, dx\\ &= \int (1-\sin^2 x)\cos x\, dx\\ &= \int \cos x\, dx - \int (\sin x)^2 \cos x\, dx\\ &= \sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C \ (\ C \text{ は積分定数}\ )\end{aligned}$$

とみるのが定石です。

(2) **被積分関数に** x , t **が入り混じっています。**

積分変数は t **であるため ,** x **をインテグラルから摘まみ出します。**

加法定理によって

$$\begin{aligned}f(x)&=\cos^2 x+3\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)(\cos x\cos t-\sin x\sin t)\cos x\, dt\\ &=\left\{1+3\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\, dt\right\}\cos^2 x-\left\{3\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\, dt\right\}\sin x\cos x\end{aligned}$$

として , $\begin{cases} I=1+3\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\, dt \\ J=3\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\, dt \end{cases}$ **とおくことで**

$f(x)=I\cos^2 x-J\sin x\cos x$ **と** $f(x)$ **の構造が具体的になります。**

あとは $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\, dt$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\, dt$ **との絡みを考えて連立方程式に持ち込みます。**

【解答】

(1)
$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\, dx &= \int \cos^2 x\, \cos x\, dx\\ &= \int (1-\sin^2 x)\cos x\, dx\\ &= \int \cos x\, dx - \int (\sin x)^2 \cos x\, dx\\ &= \sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C \ (\ C \text{ は積分定数}\ ) \cdots \text{答}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}f(x)&=\cos^2 x+3\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)(\cos x\cos t-\sin x\sin t)\cos x\, dt\\ &=\left\{1+3\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\, dt\right\}\cos^2 x-\left\{3\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\, dt\right\}\sin x\cos x\end{aligned}$$

$\begin{cases} I=1+3\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\, dt \ \cdots ① \\ J=3\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\, dt \ \cdots ② \end{cases}$ とおくと ,

$$f(x)=I\cos^2 x-J\sin x\cos x \ \cdots ③$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\, dt&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(I\cos^3 t-J\sin t\cos^2 t)\,dt\\ &=I\left[\sin t-\frac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+J\left[\frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &=\frac{2}{3}I-\frac{1}{3}J\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\, dt&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(I\sin t\cos^2 t-J\sin^2 t\cos t)\,dt\\ &=-I\left[\frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-J\left[\frac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &=\frac{1}{3}I-\frac{1}{3}J\end{aligned}$$

① , ② より , $\begin{cases} I=1+3\left(\frac{2}{3}I-\frac{1}{3}J\right) \\ J=3\left(\frac{1}{3}I-\frac{1}{3}J\right) \end{cases}$ であり , 整理すると

$\begin{cases} I-J=-1 \\ I-2j=0 \end{cases}$ で , これら 2 式から $I=-2$, $J=-1$

③ に代入し , $f(x)=-2\cos^2 x+\sin x\cos x$ $\cdots$ 答

【総括】

積分変数以外の文字をインテグラルから摘まみ出そうという気持ちをもちましょう。