

積分方程式【変数型】 【類題2】

$f(x)$ は実数全体で定義された連続関数であり，すべての実数 x に対して以下の関係式を満たすとする。

$$\int_0^x e^t f(x-t) dt = f(x) - e^x$$

関数 $f(x)$ を求めよ。

< '17 奈良県立医科大 >

【戦略】

x をインテグラルから摘みださなければなりません。

ただ，今回は $f(x-t)$ と，かなり奥深くに x がいます。

初見だと困る人も多いかもしれませんが，

$x-t=u$ という置換をすることで $-dt=du$, $\begin{array}{c|c} t & 0 \rightarrow x \\ u & x \rightarrow 0 \end{array}$

$$\begin{aligned} \int_0^x e^t f(x-t) dt &= \int_x^0 e^{x-u} f(u) \cdot (-1) du \\ &= \int_0^x e^{x-u} f(u) du \\ &= e^x \int_0^x e^{-u} f(u) du \end{aligned}$$

と摘出できます。

この摘出を終え，積分方程式の変数型の処理である両辺微分を施すと

$$f'(x) = 2f(x)$$

という関係を得ることになります。

ここも経験が必要ですが， $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2$ と見て，両辺積分することで

$$\log |f(x)| = 2x + C$$

と進めます。

これにより，

$$\begin{aligned} |f(x)| &= e^{2x+C} \\ &= e^C \cdot e^{2x} \end{aligned}$$

であり， $f(x) = \pm e^C \cdot e^{2x}$ と表せます。

あらためて $A = \pm e^C$ と置きなおせば， $f(x) = Ae^{2x}$ という形となるわけです。

A は積分区間をつぶす $f(0)$ を経由して導出すればよいでしょう。

【解答】

$x-t=u$ とおくと， $-dt=du$, $\begin{array}{c|c} t & 0 \rightarrow x \\ u & x \rightarrow 0 \end{array}$

$$\begin{aligned} \int_0^x e^t f(x-t) dt &= \int_x^0 e^{x-u} f(u) \cdot (-1) du \\ &= \int_0^x e^{x-u} f(u) du \\ &= e^x \int_0^x e^{-u} f(u) du \end{aligned}$$

よって，与えられた等式は

$$e^x \int_0^x e^{-u} f(u) du = f(x) - e^x$$

すなわち，

$$\int_0^x e^{-u} f(u) du = e^{-x} f(x) - 1 \cdots (*)$$

(*) の両辺を x で微分すると， $e^{-x} f(x) = -e^{-x} f(x) + e^{-x} f'(x)$

$e^{-x} > 0$ より， $f(x) = -f(x) + f'(x)$

$$f'(x) = 2f(x)$$

$f(x) = 0$ という定数関数でないとき， $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2$ であり，

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int 2 dx$$

ゆえに， $\log |f(x)| = 2x + C$ (C は積分定数)

これより，定数 A を用いて， $f(x) = Ae^{2x}$ という形で表される。

これは $f(x) = 0$ という定数関数も表すことができる。

(*) に $x=0$ を代入すると， $0 = e^0 f(0) - 1$ ，すなわち $f(0) = 1$ を得る。

$f(x) = Ae^{2x}$ において， $f(0) = A$ であることから $A = 1$

以上から $f(x) = e^{2x} \cdots$ 罫

【総括】

- ①：置換による摘出
- ②： $y' = ky$ というタイプの微分方程式

など，経験が必要な部分がごとごとくノーヒントでした。

① は積分方程式の変数型の対応の一環です。

② については，

$f'(x) - 2f(x) = 0$ の両辺に e^{-2x} をかけると

$$e^{-2x} f'(x) - 2e^{-2x} f(x) = 0, \text{ すなわち } (e^{-2x} f(x))' = 0$$

これより， $e^{-2x} f(x) = A$ ，すなわち $f(x) = Ae^{2x}$ を得るという方法もあります。（積分因子法）