関数 $f(x)$ は

$$f(x)=2x-3+\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt$$

を満たし，第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつものとする。

(1) $f(0)$ を求めよ。

(2) $f'(0)$ を求めよ。

(3) $f''(x)$ を x の整式で表せ。

(4) $f'(x)$ および $f(x)$ を求めよ。

＜ '04 明治大 ＞

【戦略】

基本方針は，両辺を x で微分します。

被積分関数から積分変数 t 以外の文字である x を摘まみだすために $\sin(x-t)$ を加法定理でバラして摘まみだします。

それにより $f(x)=2x-3+\sin x\int_0^x f(t)\cos t\,dt-\cos x\int_0^x f(t)\sin t\,dt$

を得ます。

ここから両辺を x で微分していくわけですが，積の微分法の処理は符号のミスに注意しながら処理していきます。

【解答】

(1) $f(x)=2x-3+\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt$ …①

① の両辺に $x=0$ を代入すると $f(0)=-3$ …答

(2) ① は

$$f(x)=2x-3+\int_0^x f(t)(\sin x\cos t-\cos x\sin t)\,dt$$
$$=2x-3+\sin x\int_0^x f(t)\cos t\,dt-\cos x\int_0^x f(t)\sin t\,dt \quad \cdots ①'$$

と変形でき，①′ の両辺を x で微分すると

$$f'(x)=2+\cos x\int_0^x f(t)\cos t\,dt+\sin x\, f(x)\cos x$$
$$+\sin x\int_0^x f(t)\sin t\,dt-\cos x\, f(x)\sin x$$
$$=2+\cos x\int_0^x f(t)\cos t\,dt+\sin x\int_0^x f(t)\sin t\,dt \quad \cdots ②$$

これより，$f'(0)=2$ …答

(3) ② の両辺を x で微分すると

$$f''(x)=(-\sin x)\int_0^x f(t)\cos t\,dt+\cos x\, f(x)\cos x$$
$$+(\cos x)\int_0^x f(t)\sin t\,dt+\sin x\, f(x)\sin x$$
$$=\cos x\int_0^x f(t)\sin t\,dt-\sin x\int_0^x f(t)\cos t\,dt$$
$$+f(x)(\cos^2 x+\sin^2 x)$$
$$=f(x)+\cos x\int_0^x f(t)\sin t\,dt-\sin x\int_0^x f(t)\cos t\,dt$$

①′ より，$f(x)+\cos x\int_0^x f(t)\sin t\,dt-\sin x\int_0^x f(t)\cos t\,dt=2x-3$

ゆえに，$f''(x)=2x-3$ …答

(4) $f'(x)=x^2-3x+C_1$ (C_1 は積分定数) で，(2) より，$f'(0)=2$ なので $C_1=2$

$$\therefore\ f'(x)=x^2-3x-2$$

これより，$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-2x+C_2$ （C_2 は積分定数）で (1) より $f(0)=-3$ なので，$C_2=-3$

$$\therefore\ f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-2x-3 \quad \cdots 答$$

【総括】

方針面で見失うことがあってはなりませんが，集中していないと符号ミスが起こりそうです。

最初の加法定理で邪魔者を摘まみだす作業をお忘れなく。