関数 $f(x)$ は実数全体で連続で，すべての実数 x に対して

$$f(x)=(1-x)\cos x+x\sin x-\int_0^x e^{x-t}f(t)\,dt$$

を満たすとする。ただし，e は自然対数の底である。次の問に答えよ。

(1)　$f(0)$ の値を求めよ。

(2)　$f(x)$ を求めよ。

＜ '19 広島大 改 ＞

【戦略】

(1)　$\int_0^0$ **と積分区間を潰すよう，$x=0$ を代入することを考えます。**

(2)　**積分方程式の変数型は**

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$$

という基本事項を用いることを考え，両辺を x で微分します。

ただし，被積分関数(インテグラルの中身)を t の式のみにする必要があります。

そこで，$f(x)=(1-x)\cos x+x\sin x-e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt$

としてから両辺を x で微分します。

$e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt$ **の微分については，**$e^x\cdot(x$ **の式) という構造ですから**

$$(e^x)'\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt+e^x\cdot\boxed{\left(\frac{d}{dx}\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt\right)}$$

と積の微分法で捌いていきます。

そして，$\boxed{}$ の部分に上記基本事項を用います。

この処理により，$f'(x)=2(x-1)\cos x$　**と得ることができます。**

$f(x)$ **は** $2(x-1)\cos x$ **の原始関数ということになりますから**

$\int 2(x-1)\cos x\,dx$ **を部分積分で処理すればよいでしょう。**

【解答】

(1)　$f(x)=(1-x)\cos x+x\sin x-\int_0^x e^{x-t}f(t)\,dt$　$\cdots(*)$

$(*)$ に $x=0$ を代入すると

$$f(0)=1\cdot\cos 0+0\cdot\sin 0-\int_0^0 e^{-t}f(t)\,dt$$
$$=1 \cdots 答$$

(2)　$(*)$ は $f(x)=(1-x)\cos x+x\sin x-e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt$　$\cdots(**)$

と変形でき，この両辺を x で微分すると

$$f'(x)=(-1)\cdot\cos x+(1-x)(-\sin x)+1\cdot\sin x+x\cdot\cos x$$
$$-e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt-e^x\cdot(e^{-x}f(x))$$

$$=-\cos x+x\sin x+x\cos x-e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt-f(x)\ \cdots①$$

$(**)$ より，$e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt=-f(x)+(1-x)\cos x+x\sin x\ \cdots②$

② を ① に代入すると，

$$f'(x)=-\cos x+x\sin x+x\cos x+f(x)-(1-x)\cos x-x\sin x-f(x)$$
$$=2(x-1)\cos x$$

$$\int 2(x-1)\cos x\,dx=\int 2(x-1)(\sin x)'\,dx$$
$$=2(x-1)\sin x-\int 2\sin x\,dx$$
$$=2(x-1)\sin x+2\cos x+C\quad(\ C \text{は積分定数}\ )$$

よって，$f(x)=2(x-1)\sin x+2\cos x+C$

(1) より $f(0)=1$ なので，$2\cdot(-1)\cdot\sin 0+2\cos 0+C=1$

すなわち $C=-1$ を得る。

ゆえに，$f(x)=2(x-1)\sin x+2\cos x-1$ $\cdots$ 答

【総括】

積分方程式の変数型への対応をしっかりとマスターしましょう。

特に，被積分関数から積分変数以外を摘まみだすことをお忘れなく。

なお　$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$ の証明ですが，$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とすると

$$\int_a^x f(t)\,dt=\Big[F(t)\Big]_a^x=F(x)-F(a)$$

ということになり，両辺を x で微分することで

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=F'(x)=f(x)$$

となります。

この原理が分かっていれば

$$\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt=f(g(x))g'(x)-f(h(x))h'(x)$$

という，より一般論の公式も導けるでしょう。

$$\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt=\Big[F(t)\Big]_{h(x)}^{g(x)}=F(g(x))-F(h(x))$$

で，両辺を x で微分すれば

$$\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt=F'(g(x))\cdot g'(x)-F'(h(x))\cdot h'(x)$$
$$=f(g(x))g'(x)-f(h(x))h'(x)$$

を得ます。