白球 15 個と赤球 4 個が箱に入っている。この箱から球を 1 個取り出す操作を繰り返す。ただし，取り出した球はもとに戻さない。

n 回目に取り出した球が 3 個目の赤球である確率を p_n とする。

p_n が最大となる n を求めよ。

＜ '97 一橋大 ＞

【戦略】

例題同様，イメージ的には

1 回目	2 回目	3 回目	……	$n-1$ 回目	n 回目
○	○	○		○	○

ここまでで赤球が 2 回出ている

トドメの 3 回目

というイメージです。

全事象 ${}_{19}\mathrm{P}_n$ 通りの取り出し方のうち何通りが n 回目に 3 回目の赤を取るような取り出し方なのかを考えていきます。

1 回目	2 回目	3 回目	……	$n-1$ 回目	n 回目
○	○	○		○	○

どの 2 個の赤球かが ${}_4\mathrm{C}_2$ 通り

どの $n-3$ 個の白球かが ${}_{15}\mathrm{C}_{n-3}$ 通り

→ これら $n-1$ 個の並べ方は $(n-1)!$ 通り

どの赤球かは残り 2 通り

というイメージで式を立てれば

$$p_n=\frac{\{{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_{15}\mathrm{C}_{n-3}\cdot(n-1)!\}\times 2}{{}_{19}\mathrm{P}_n}$$

と立式できます。

この後の p_n が最大となる n の導出戦略は例題と同じく $\dfrac{p_{k+1}}{p_k}$ と 1 の比較を考えていくことで進めていきます。

【解答】

$p_1=p_2=0$，$p_{19}=0$ …①

以下，$3\leqq n\leqq 18$ として，p_3，p_4，……，p_{18} について考える。

1 回目	2 回目	3 回目	……	$n-1$ 回目	n 回目
○	○	○		○	○

どの 2 個の赤球なのかが ${}_4\mathrm{C}_2$ 通り

どの $n-3$ 個の白球かが ${}_{15}\mathrm{C}_{n-3}$ 通り

→ これら $n-1$ 個の並べ方は $(n-1)!$ 通り

どの赤球かは残り 2 通り

したがって，

$$p_n=\frac{\{{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_{15}\mathrm{C}_{n-3}\cdot(n-1)!\}\times 2}{{}_{19}\mathrm{P}_n}$$

$$=\frac{6\cdot\dfrac{15!}{(n-3)!\,(18-n)!}\cdot(n-1)!\cdot 2}{\dfrac{19!}{(19-n)!}}$$

$$=\frac{12\cdot 15!}{19!}\cdot\frac{(n-1)!}{(n-3)!}\cdot\frac{(19-n)!}{(18-n)!}$$

$$=\frac{12\cdot 15!}{19!}\cdot(n-1)(n-2)(19-n)$$

ゆえに，$k=3$，4，……，18 として，

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}=\frac{\dfrac{12\cdot 15!}{19!}\cdot k(k-1)(18-k)}{\dfrac{12\cdot 15!}{19!}\cdot(k-1)(k-2)(19-k)}$$

$$=\frac{k(18-k)}{(k-2)(19-k)}$$

[1]：$\dfrac{p_{k+1}}{p_k}>1$，すなわち $p_k<p_{k+1}$ のとき $\dfrac{k(18-k)}{(k-2)(19-k)}>1$

$k=3$，4，……，18 より分母は正であるから，

$$k(18-k)>(k-2)(19-k)$$

$$18k-k^2>-k^2+21k-38$$

$$3k<38$$

$$k<\frac{38}{3}$$

[2]：$\dfrac{p_{k+1}}{p_k}<1$，すなわち $p_k<p_{k+1}$ のとき $\dfrac{k(18-k)}{(k-2)(19-k)}<1$

[1] の計算過程を拝借すれば，$k>\dfrac{38}{3}$

[1]，[2] から，$\begin{cases} k=3,\ 4,\ \cdots,\ 12 & \text{のとき}\ p_k<p_{k+1} \\ k=13,\ 14,\ \cdots,\ 18 & \text{のとき}\ p_k>p_{k+1} \end{cases}$ …②

①，② から

$0=p_1=p_2<p_3<p_4<\cdots<p_{12}<p_{13}>p_{14}>p_{15}>\cdots>p_{18}>p_{19}=0$

であり，p_n が最大となる n の値は $n=13$ …㊀

【総括】

例題はサイコロを投げるという設定で，これはある意味

袋の中から ① ～ ⑥ の番号の付いた球を取っては戻し，取っては戻しをくり返す

という袋から球を取り出す操作となんら変わりありません。

そういった意味で，例題と本問を比較すると

例題では「復元抽出 (元に戻す)」

本問は「非復元抽出 (元に戻さない) 」

という操作だったため，p_n の導出過程で若干勝手が違ったかもしれません。

ただ，難関大を目指すにあたっては，この辺りのイレギュラーには対応できる力が必要です。

なお，${}_n\mathrm{P}_k=\dfrac{n\,!}{(n-k)!}$，${}_n\mathrm{C}_k=\dfrac{n\,!}{k\,!\,(n-k)!}$ と，${}_n\mathrm{P}_k$，${}_n\mathrm{C}_k$ を階乗で書き下せない受験生をたまに見かけますが，これも難関大を目指すのであれば甘えは許されません。

${}_n\mathrm{C}_3=\dfrac{n\,(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}$ と言ったように右側が 3 という数字であれば階乗を用いずとも書き下せますが，本問で登場した ${}_{15}\mathrm{C}_{n-3}$ のように右側に文字が入ってくると階乗で表現せざるを得ませんから。