サイコロを振る操作をくり返し，1の目が3回出たらこの操作を終了する。サイコロの目が2，4，1，5，1，1 と出た時点で終了である。

3以上の自然数 n に対し，n 回目にこの操作が終了する確率を p_n とする。

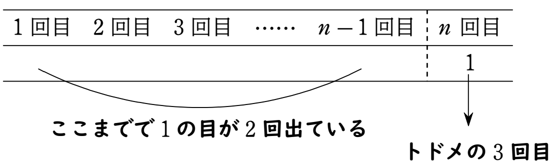
(1)　p_n を求めよ。

(2)　p_n の値が最大となる n の値を求めよ。

＜ ’03 京都産業大 改 ＞

【戦略】

(1)　**イメージ的には**



というイメージです。

直前までの $n-1$ 回の操作の内訳は $\begin{cases} 2\text{回が}1\text{の目} \\ n-3\text{回が}1\text{以外の目} \end{cases}$

ということで，その確率については反復試行の確率として仕留めます。

(2)　**何回目に終わりやすいかという趣旨です。**

極端な話，4回目で終わりやすいかというと4回中3回も1の目が出ることになり，起こりづらいでしょう。

ただ，例えば100回目で終わりやすいかというと，今度は「そんなに投げたらそれ以前で1の目は3回ぐらい出ている」ということで n が大きくなっていくと起こりにくくなっていきます。

ちょうどいい塩梅(あんばい)はどこかという話です。

このイメージで言えば

$p_3<p_4<\cdots\cdots$ **とある程度までは大きくなっていき，そこからは** $p_{\bigcirc}>p_{\bigcirc+1}>\cdots\cdots$ **と小さくなっていくことが考えられます。**

これを調べる有力手段は，

p_3，p_4 **のどっちが大きい？**

p_4，p_5 **のどっちが大きい？**

$\vdots$

p_k，p_{k+1} **のどっちが大きい？**

というように隣り合う2項を比較します。

2数の大小比較においては「差を取って0と比較する」という方法もありますが，この分野では積を用いて数え上げることも多く「比をとって1と比較する」という方針がよく用いられます。

【解答】

(1)　$n-1$ 回の操作で1の目が2回出る …①

かつ

n 回目の操作で1が出る …②

となる確率が p_n である。

①は $n-1$ 回の操作のうち

$$\begin{cases} 2\text{回}1\text{の目が出る} \\ n-3\ \text{回}1\text{以外の目が出る} \end{cases}$$

という事象が起こる確率で，その確率は

$${}_{n-1}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}$$

②が起こる確率は $\dfrac{1}{6}$

よって，

$$\begin{aligned} p_n &= {}_{n-1}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}\times\frac{1}{6} \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot\frac{5^{n-3}}{6^n} \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot\frac{5^n}{6^n}\cdot\frac{1}{5^3} \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{250}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n \ \cdots\text{答} \end{aligned}$$

(2)　$k=3$，4，…… とするとき，

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}=\frac{\dfrac{k(k-1)}{250}\cdot\left(\dfrac{5}{6}\right)^{k+1}}{\dfrac{(k-1)(k-2)}{250}\cdot\left(\dfrac{5}{6}\right)^k}$$

$$=\frac{5k}{6(k-2)}$$

[1]：$\dfrac{p_{k+1}}{p_k}>1$，すなわち $p_k<p_{k+1}$ となるとき $\dfrac{5k}{6(k-2)}>1$

$k\geqq 3$ より，$6(k-2)>0$ なので，$5k>6(k-2)$

これより，$k<12$

[2]：$\dfrac{p_{k+1}}{p_k}=1$，すなわち $p_k=p_{k+1}$ となるとき $\dfrac{5k}{6(k-2)}=1$

これを解くと $k=12$

[3]：$\dfrac{p_{k+1}}{p_k}<1$，すなわち $p_k>p_{k+1}$ となるとき $\dfrac{5k}{6(k-2)}<1$

これより，$k>12$

[1]，[2]，[3] より，$\begin{cases} k=3,\ 4,\ \cdots,\ 11 \text{ のとき } p_k<p_{k+1} \\ k=12 \text{ のとき } p_k=p_{k+1} \\ k=13,\ 14,\ \cdots\cdots \text{ のとき } p_k>p_{k+1} \end{cases}$

これより　$p_3<p_4<p_5<\cdots<p_{11}<p_{12}=p_{13}>p_{14}>p_{15}>\cdots\cdots$

ゆえに，p_{12}，p_{13} が最大となり，求める n は $n=12$，13 …答

【総括】

p_k，p_{k+1} の大小を比較したいときに

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \text{ と } 1 \text{ の大小を比較すればよい}$$

という方針は定番の考え方です。

一般に負の値が絡んでくるとむやみやたらに分母を払うわけにはいかないのですが，確率では正の値を扱うのでそこについては問題ありません。
（ただ，分母を払うという作業に伴う注意点として，意識はしておきましょう。）

1 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ で，6 回投げたら 1 回は 1 の目が期待できるという感覚です。

12 回投げれば 2 回は 1 の目が出ていることが期待でき，その近辺で 3 回目の 1 が出るということが起こりやすそうという感覚から言えば，出てきた結論はある程度納得いくでしょう。