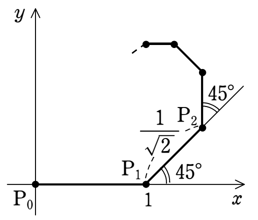
右図のように複素数平面の原点を P_0 とし，P_0 から実軸の正の方向に 1 進んだ点を P_1 とする。

次に P_1 を中心として 45° 回転して向きを変え，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 進んだ点を P_2 とする。

以下同様に P_n に到達した後，45°回転してから前回進んだ距離の $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍進んで到達する点を P_{n+1} とする。

このとき，点 P_{10} が表す複素数を求めよ。



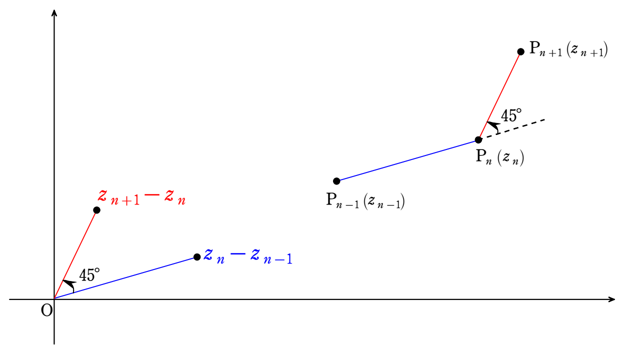
< ’98 日本女子大 >

【戦略】

P_n に到達した後，45°回転してから前回進んだ距離の $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍進んで到達する点を P_{n+1} とする。

という条件の動きを立式することからスタートします。

回転の中心を原点にもってきた方が分かりやすいということであれば



という図で考えて，

$$z_{n+1}-z_n=(z_n-z_{n-1})\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$$

と立式できれば，等比数列の構造が現れ，手なりに進んでいきます。

もちろん，

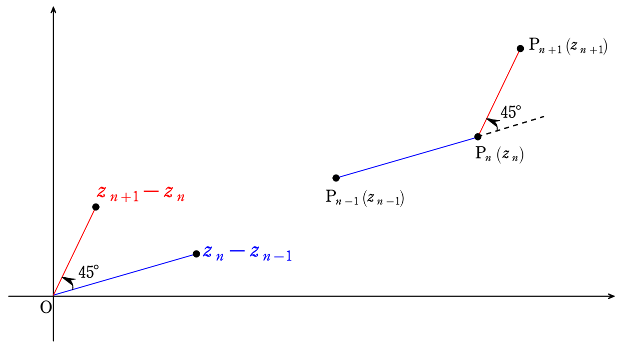
$\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ **を 45° 回転し，大きさを $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍したら $\overrightarrow{P_nP_{n+1}}$ となる**

と捉えていきなり

$$z_{n+1}-z_n=(z_n-z_{n-1})\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$$

と立式することもできます。

【解答】



$P_n(z_n)$ とする。

点 z_n-z_{n-1} を原点を中心に反時計回りに 45° 回転し，大きさを $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍すると点 $z_{n+1}-z_n$ を表すため

$$z_{n+1}-z_n=(z_n-z_{n-1})\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$$
$$=\frac{1+i}{2}(z_n-z_{n-1})$$

これより，

$$z_{n+1}-z_n=(z_1-z_0)\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$$
$$=(1-0)\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$$
$$=\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$$

よって

$$\begin{cases} z_1-z_0=1 \\ z_2-z_1=\dfrac{1+i}{2} \\ z_3-z_2=\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^2 \\ \quad\vdots \\ z_{10}-z_9=\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^9 \end{cases}$$

辺々加えれば

$$z_{10}-z_0=1+\left(\frac{1+i}{2}\right)+\left(\frac{1+i}{2}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1+i}{2}\right)^9$$

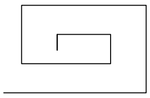
ゆえに，$z_{10}=\dfrac{1-\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^{10}}{1-\dfrac{1+i}{2}}$

ここで，

$$\left(\frac{1+i}{2}\right)^{10}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)\right\}^{10}$$
$$=\frac{1}{32}(\cos 450^\circ+i\sin 450^\circ)\ (\because \text{ド・モアブルの定理})$$
$$=\frac{1}{32}(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ)$$
$$=\frac{1}{32}i$$

よって，点 P_{10} が表す複素数 z_{10} は $z_{10}=\dfrac{1-\dfrac{1}{32}i}{1-\dfrac{1+i}{2}}=\dfrac{33+31i}{32}$ …答

【総括】

ラーメンの器にある  のようなクルクル系の動きをする

この分野のよくある定番の問題です。

（ラーメンの器のあの模様は雷紋と呼ばれるそうなので，勝手に雷紋問題と呼ぶことにします。）

ベクトルの回転を複素数平面として立式表現することに慣れてください。

なお，今回は P_{10} という具体的な点が訊かれていましたが，

$n \to \infty$ のとき P_n はどの点に限りなく近づくか

という極限の問題として訊かれることもよくあります。