

点列の極限【雷紋問題】 【類題】

複素数 z_n を,

$$z_0=0, z_1=1, z_{n+2}=z_{n+1}+\alpha(z_{n+1}-z_n) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

により定める。ただし, i を虚数単位とし, $\alpha=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ とする。また, 複素数平面上で複素数 z_n を表す点を P_n とする。

- (1) z_2, z_3, z_4 を求めよ。
- (2) 点 P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 を図示せよ。
また, 線分 $P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4$ の長さ, および $\angle P_2P_1P_0, \angle P_3P_2P_1, \angle P_4P_3P_2$ の値も図中に示せ。
- (3) $z_{n+1}-z_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) を α と n を用いて表せ。
- (4) z_n の実部, 虚部をそれぞれ x_n, y_n とする。このとき, x_n, y_n をそれぞれ n を用いて表せ。
- (5) (4) で求めた x_n, y_n について, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ をそれぞれ求めよ。

< '16 九州工業大 >