複素数 z_n を，

$$z_0=0,\ z_1=1,\ z_{n+2}=z_{n+1}+\alpha(z_{n+1}-z_n)\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

により定める。ただし，i を虚数単位とし，$\alpha=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ とする。また，複素数平面上で複素数 z_n を表す点を P_n とする。

(1) z_2，z_3，z_4 を求めよ。

(2) 点 P_0，P_1，P_2，P_3，P_4 を図示せよ。
また，線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$，$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$，$\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$，$\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4$ の長さ，および $\angle\mathrm{P}_2\mathrm{P}_1\mathrm{P}_0$，$\angle\mathrm{P}_3\mathrm{P}_2\mathrm{P}_1$，$\angle\mathrm{P}_4\mathrm{P}_3\mathrm{P}_2$ の値も図中に示せ。

(3) $z_{n+1}-z_n$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$) を α と n を用いて表せ。

(4) z_n の実部，虚部をそれぞれ x_n，y_n とする。このとき，x_n，y_n をそれぞれ n を用いて表せ。

(5) (4) で求めた x_n，y_n について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}y_n$ をそれぞれ求めよ。

＜ '16 九州工業大 ＞

【戦略】

例題は

動き方が日本語で書いてあり，それを漸化式で立式表現する

と言う流れでした。

本問は先に

$$z_0=0,\ z_1=1,\ z_{n+2}=z_{n+1}+\alpha(z_{n+1}-z_n)\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

という漸化式の方が与えられて，

この漸化式で定まる点列はどういう振る舞いをする？

という投げかけ方になっています。

もちろん，例題で学習した

ベクトルの回転＆拡大縮小

という漸化式の図形的意味を読み取れれば，正直 (1)，(2) の実験設問については計算した「ふり」ができると思います。

(4) の z_n を有理化して実部虚部を導出する部分の計算は鬱陶しいものがありますが，落ち着いて部分的に処理するのがよろしいかと思います。

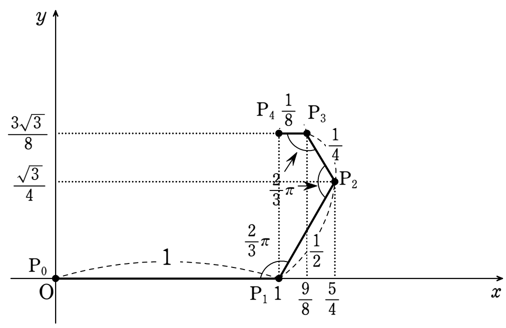
【解答】

(1) $z_2=z_1+\alpha(z_1-z_0)=1+\alpha=\dfrac{5}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}i$ …答

$z_3=z_2+\alpha(z_2-z_1)=1+\alpha+\alpha^2=\dfrac{9}{8}+\dfrac{3\sqrt{3}}{8}i$ …答

$z_4=z_3+\alpha(z_3-z_2)=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3=1+\dfrac{3\sqrt{3}}{8}i$ …答

(2)



(3) $z_{n+2}-z_{n+1}=\alpha(z_{n+1}-z_n)$ であるため

$z_{n+1}-z_n=\alpha^n(z_1-z_0)$，すなわち $z_{n+1}-z_n=\alpha^n$ …答

(4) $n\geqq 1$ のとき，

$$\begin{aligned}z_n&=z_0+\sum_{k=0}^{n-1}(z_{k+1}-z_k)\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k\\&=\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}\end{aligned}$$

ここで，$\alpha^n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{3}+i\sin\dfrac{n\pi}{3}\right)$

ゆえに，$z_n=\dfrac{1-\dfrac{1}{2^n}\left(\cos\dfrac{n\pi}{3}+i\sin\dfrac{n\pi}{3}\right)}{\dfrac{3}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}i}$

$$=\frac{\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}i\right)\left\{\left(1-\dfrac{1}{2^n}\cos\dfrac{n\pi}{3}\right)-\dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{3}}{2^n}i\right\}}{\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}i\right)\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}i\right)}$$

z_n の実部は

$$\frac{\dfrac{3}{4}\cdot\left(1-\dfrac{1}{2^n}\cos\dfrac{n\pi}{3}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{3}}{2^n}}{\dfrac{3}{4}}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2^n}\cos\frac{n\pi}{3}\right)+\frac{1}{2^n\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}$$

z_n の虚部は

$$\frac{-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{3}}{2^n}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\cos\dfrac{n\pi}{3}\right)}{\dfrac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{2^n}\cos\frac{n\pi}{3}\right)-\frac{1}{2^n}\sin\frac{n\pi}{3}$$

よって

$$x_n=1-\frac{1}{2^n}\cos\frac{n\pi}{3}+\frac{1}{2^n\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}\quad\cdots 答$$

$$y_n=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2^n\sqrt{3}}\cos\frac{n\pi}{3}-\frac{1}{2^n}\sin\frac{n\pi}{3}\quad\cdots 答$$

(5) $\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|\leqq 1$, $\left|\sin\frac{n\pi}{3}\right|\leqq 1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}x_n=1,\ \lim_{n\to\infty}y_n=\frac{1}{\sqrt{3}}\quad\cdots 答$$

【総括】

本問の場合，クルクル回転しながら，ある点に向かって収束していく様子が見えなくても，カギとなる漸化式が最初に与えられていることから計算自体はできてしまいます。

ただ，通常は

動きが日本語で説明してある → 自分で漸化式を作成

というのがよくある流れだと思いますので，そちらの流れでは自力で漸化式の作成もできるようにしましょう。