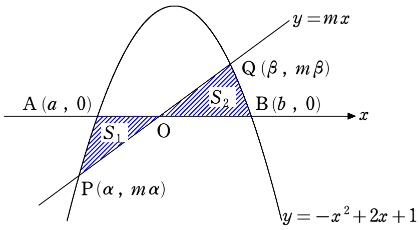
放物線と２直線で分けられる部分の面積

放物線 $C : y=-x^2+2x+1$ と x 軸の共有点を $\mathrm{A}(a\,,\ 0)$，$\mathrm{B}(b\,,\ 0)$ とし，C と直線 $y=mx$ の共有点を $\mathrm{P}(\alpha\,,\ m\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta\,,\ m\beta)$ とする。ただし，$a<b$，$m\neq 0$，$\alpha<\beta$ とする。

線分 OP，OA と C で囲まれた図形の面積と，線分 OQ，OB で囲まれた図形の面積が等しいとき，m の値を求めよ。

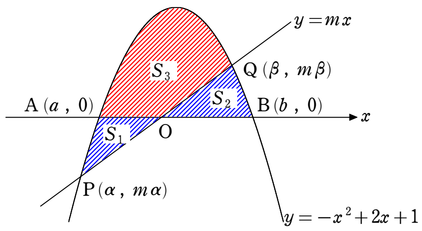
＜ '03 大阪大 ＞

【戦略】



S_1，S_2 は積分区間により上下の関数が入れ替わるため，$S_1=S_2$ と見て処理に入るのはシンドイものがあります。

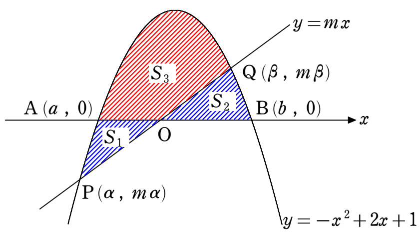
そこで



と S_3 を補い，$S_1+S_3=S_2+S_3$ と見て処理に入ります。

S_1+S_3 も S_2+S_3 も放物線と直線で囲まれた部分の面積なので，$\dfrac{1}{6}$ 公式で捌く定番の面積計算となります。

【解答】



$f(x)=-x^2+2x+1$ とおく。

$f(x)=0$ の解が $x=a$，b であること，及び $f(x)$ は最高次の係数が -1 の2次式であることを考えると

$$f(x)=-(x-a)(x-b)\ \cdots ①$$

$f(x)=mx$，すなわち $f(x)-mx=0$ の解が $x=\alpha$，β であること，及び $f(x)$ は最高次の係数が -1 の2次式であることを考えると

$$f(x)-mx=-(x-\alpha)(x-\beta)\ \cdots ②$$

線分 OP，OA，C で囲まれた部分の面積を S_1
線分 OQ，OB，C で囲まれた部分の面積を S_2
線分 OQ，OA，C で囲まれた部分の面積を S_3

とする。

$$S_1=S_2 \iff S_1+S_3=S_2+S_3$$

より，$S_1+S_3=S_2+S_3$ となるときの m の値を求めればよい。

$$\begin{aligned} S_1+S_3&=\int_\alpha^\beta\{f(x)-mx\}\,dx \\ &=\int_\alpha^\beta -(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\ (\because ②) \\ &=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2+S_3&=\int_a^b f(x)\,dx \\ &=\int_a^b -(x-a)(x-b)\,dx\ (\because ①) \\ &=\frac{1}{6}(b-a)^3 \end{aligned}$$

ゆえに，$\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\dfrac{1}{6}(b-a)^3$，すなわち $(\beta-\alpha)^3=(b-a)^3\ \cdots(*)$

ここで，a，b は $x^2-2x-1=0$ の解であるため，解と係数の関係から

$$\begin{cases} a+b=2 \\ ab=-1 \end{cases}$$

これより，

$$\begin{aligned} (b-a)^2&=(a+b)^2-4ab \\ &=8 \end{aligned}$$

$b>a$ より $b-a>0$ であり，$b-a=8^{\frac{3}{2}}\ \cdots$(ア)

一方，α，β は $-x^2+2x+1=mx$，すなわち $x^2+(m-2)x-1=0$ の解であるため，解と係数の関係から

$$\begin{cases} \alpha+\beta=2-m \\ \alpha\beta=-1 \end{cases}$$

これより

$$\begin{aligned} (\beta-\alpha)^2&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta \\ &=m^2-4m+8 \end{aligned}$$

$\beta>\alpha$ より，$\beta-\alpha>0$ であり，$(\beta-\alpha)^3=(m^2-4m+8)^{\frac{3}{2}}\ \cdots$(イ)

(ア)，(イ) を $(*)$ に代入すると $(m^2-4m+8)^{\frac{3}{2}}=8^{\frac{3}{2}}$

よって，$m^2-4m+8=8$ でこれを整理すると $m(m-4)=0$

条件 $m\neq 0$ より，$m=4\ \cdots$㊧

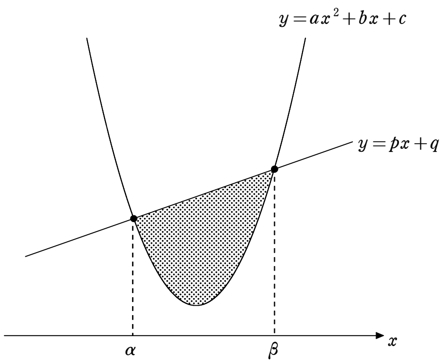
【総括】

初見だとテクッているように見えますが，共通部分を補うことで処理を楽にするという有名な工夫です。

＜確認＞

放物線と直線で囲まれる部分の面積は $\dfrac{1}{6}$ 公式で処理できます。

ひとまず下に凸の放物線 $y=ax^2+bx+c\ \ (a>0)$ と直線 $y=px+q$ で囲まれる部分の面積について考えます。



交点の x 座標は $px+q=ax^2+bx+c$

すなわち，$(px+q)-(ax^2+bx+c)=0$ という x の 2 次方程式の解で与えられます。(今，それらを α，β $(\alpha<\beta)$ とおきます)

$(px+q)-(ax^2+bx+c)$ が最高次の係数が $-a$ の２次式であることに注意すると

$$(px+q)-(ax^2+bx+c)=-a(x-\alpha)(x-\beta)$$

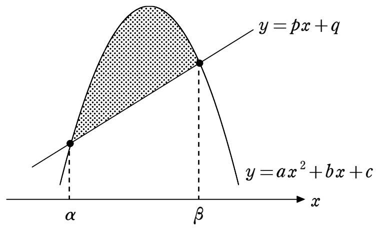
と変形できます。

$y=ax^2+bx+c$ と $y=px+q$ で囲まれる面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\int_\alpha^\beta\{(px+q)-(ax^2+bx+c)\}dx\\&=\int_\alpha^\beta -a(x-\alpha)(x-\beta)dx\\&=\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

となります。

上に凸 $(a<0)$ の場合は



交点の x 座標は $ax^2+bx+c=px+q$

すなわち，$(ax^2+bx+c)-(px+q)=0$ という x の 2 次方程式の解で与えられ，先ほど同様それらを α，β $(\alpha<\beta)$ とおきます。

$(ax^2+bx+c)-(px+q)$ が最高次の係数が a の２次式であることに注意すると

$$(ax^2+bx+c)-(px+q)=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

と変形でき，

$$\begin{aligned}S&=\int_\alpha^\beta\{(ax^2+bx+c)-(px+q)\}dx\\&=\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx\\&=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

となります。($a<0$ なので，ちゃんと $S>0$ となっています)