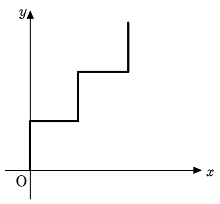
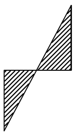
座標平面上で原点 O を出発した動点 P が図のように階段状に y 軸方向に 1 進み，x 軸方向に 1 進むことを繰り返して，点 A $(n\,,\,n+1)$ まで移動するとき，その軌跡を ℓ とする。
　線分 OA と折れ線 ℓ とによって囲まれる部分の面積を求めよ。



＜ '94 工学院大 ＞

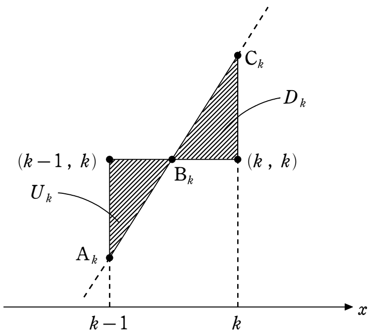
【戦略】

$$0\leqq x\leqq 1$$
$$1\leqq x\leqq 2$$
$$\vdots$$
$$n-1\leqq x\leqq n$$

と区間で区切って各々の  **を $\sum$ すればよいでしょう。**

つまり，区間 $k-1\leqq x\leqq k$ における ℓ と $y=\dfrac{n+1}{n}x$ で囲まれる部分の面積を S_k とし，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}S_k$ として仕留めることを想定しておきます。

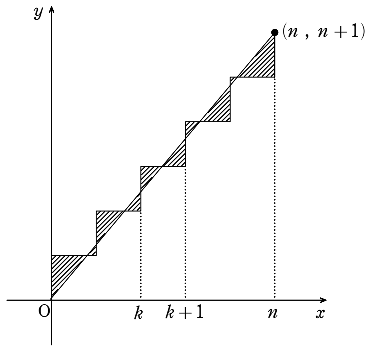
S_k の導出に関しては，上側の面積と下側の面積をそれぞれ求めて加えればよく，これらの導出のためには



という図における A_k，B_k，C_k の座標を求める必要があり，$y=\dfrac{n+1}{n}x$ と色々連立して導出します。

【解答】

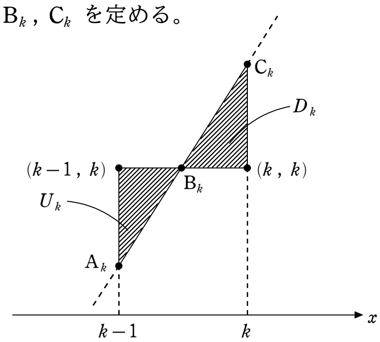
求めるのは以下の (図 1) の斜線部の面積である。



(図 1)

区間 $k-1\leqq x\leqq k$ の部分にある 2 つの三角形の面積を S_k とする。

また，以下の (図 2) のように，S_k のうち
$y=\dfrac{n+1}{n}x$ よりも上側の部分の面積を U_k，下側の部分の面積を D_k と呼び，点 A_k，B_k，C_k を定める。



(図 2)

A_k の座標は $\begin{cases} y=\dfrac{n+1}{n}x \\ x=k-1 \end{cases}$ を連立して解くことで $\left(k-1\,,\ \dfrac{n+1}{n}(k-1)\right)$ と得ることができる。

B_k の座標は $\begin{cases} y=\dfrac{n+1}{n}x \\ y=k \end{cases}$ を連立して解くことで $\left(\dfrac{nk}{n+1}\,,\ k\right)$ と得ることができる。

C_k の座標は $\begin{cases} y=\dfrac{n+1}{n}x \\ x=k \end{cases}$ を連立して解くことで $\left(k\,,\ \dfrac{n+1}{n}k\right)$ と得ることができる。

これより，

$$\begin{aligned} U_k &= \frac{1}{2}\left\{\frac{nk}{n+1}-(k-1)\right\}\left\{k-\frac{(n+1)(k-1)}{n}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{n-k+1}{n+1}\cdot\frac{n-k+1}{n} \\ &= \frac{(n-k+1)^2}{2n\,(n+1)} \end{aligned}$$

$$D_k=\frac{1}{2}\left\{k-\frac{nk}{n+1}\right\}\left\{\frac{n+1}{n}k-k\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{n+1}\cdot\frac{k}{n}$$
$$=\frac{k^2}{2n(n+1)}$$

ゆえに，

$$S_k=U_k+D_k$$
$$=\frac{1}{2n(n+1)}\{(n-k+1)^2+k^2\}$$

求める面積を S とすると

$$S=\sum_{k=1}^{n}S_k$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n(n+1)}\{(n-k+1)^2+k^2\}$$
$$=\frac{1}{2n(n+1)}\left\{\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)^2+\sum_{k=1}^{n}k^2\right\}$$

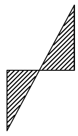
ここで，

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)^2=n^2+(n-1)^2+\cdots\cdots+2^2+1^2$$
$$=\sum_{k=1}^{n}k^2$$

ゆえに，

$$S=\frac{1}{2n(n+1)}\cdot 2\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=\frac{1}{n(n+1)}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=\frac{2n+1}{6}\quad\cdots\text{答}$$

【総括】

今回の題意の図形を  の $\sum$ というように見れるかどうかという部分にはフィルターがかかっているでしょう。

なお，上側にはみ出た部分の面積の総和と，下側にはみ出た部分の面積の総和は等しく，$\sum_{k=1}^{n}U_k=\sum_{k=1}^{n}D_k$ ということを考えると

$$S=\sum_{k=1}^{n}S_k$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(U_k+D_k)$$
$$=2\sum_{k=1}^{n}D_k$$
$$=2\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n(n+1)}$$
$$=\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=\frac{2n+1}{6}$$

と，対称性を活用することも考えられます。

この対称性については，自明に思えない人もいるであろうことを考え，ある程度は式で進めていく方が安全です。