

平方三角数とペル方程式

図左のように、正三角形の形に配置した点の個数は三角数と呼ばれ、 $1+2+\dots+n$ の形で表される。一方、平方数とは図右のように正方形の形に配置した点の個数である。



三角数であり、同時に平方数でもある自然数を以下「平方三角数」と名付ける。実は「平方三角数は無限個存在する」ことが知られている。このことを、以下の事実を示すことによって証明しなさい。

- (1) 自然数 a, b が $a^2 - 2b^2 = 1$ を満たすとき、 a は奇数で b は偶数である。
- (2) 自然数 a, b が $a^2 - 2b^2 = 1$ を満たすとき、 $a = 2n + 1, b = 2m$ とおけば、 m, n の間に成り立つ式から 1 つの平方三角数が得られる。
- (3) 自然数 k に対して $(3 + 2\sqrt{2})^k = a_k + b_k\sqrt{2}$ (a_k, b_k は自然数) とおく。このとき、 $a_k^2 - 2b_k^2 = 1$ が成り立つ。
- (4) 平方三角数は無限個存在する。

< '94 津田塾大 >