n を自然数とする。0 でない複素数からなる集合 M が次の条件 (Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ) を満たしている。

(Ⅰ) 集合 M は n 個の要素からなる。

(Ⅱ) 集合 M の要素 z に対して，$\dfrac{1}{z}$ と $-z$ はともに M の要素である。

(Ⅲ) 集合 M の要素 z，w に対して，その積 zw は集合 M の要素である。ただし，$z=w$ の場合も含める。

このとき次の問に答えよ。

(1) 1 および -1 は集合 M の要素であることを示せ。
(2) n は偶数であることを示せ。
(3) $n=4$ のとき，集合 M は一通りに定まることを示し，その要素をすべて求めよ。
(4) $n=6$ のとき，集合 M は一通りに定まることを示し，その要素をすべて求めよ。

< '17 名古屋大 >

【戦略】

(1) は $1=z\cdot\dfrac{1}{z}$，$-1=(-z)\cdot\dfrac{1}{z}$ と見れば，条件 (Ⅱ), (Ⅲ) からただちに証明できます。
正直 (1) を落としてしまうと，合格は遠のくでしょう。実際は (2) 以降が勝負です。

まず，この問題の急所の 1 つとして

z，z^2，z^3，$\cdots$ は全て M の要素である

ということに気がつく必要があります。

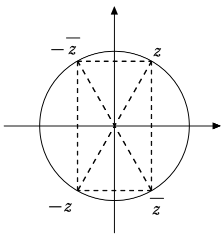
恐らくこの事実は，試しに色々集合 M の具体例みたいなものを作ってみようと手を動かしていると気がつく事実です。

この事実に気がついたとき，「あれ？」と思います。

条件 (Ⅰ) からこの集合 M は有限個の要素しかもたないので，$|z|=1$ でないと，無限にこの集合 M の要素が登場してしまい，マズいことになると分かります。

そうなると，条件に登場する $\dfrac{1}{z}$ というのは $\overline{z}$ ということになるわけですから，視覚的に捉えられます。

細かいことを抜きにすれば，z が M の要素だと右の 4 組が M の要素だと分かります。



これに，(1) で求めた 1，-1 という 2 個が加わりますから，M の要素としては $4k+2$ 個というのが基本です。

ただし，これは上の 4 つの複素数が " 相異なる " という場合の話ですから，上の 4 つの中でダブりが生じる $z=i$ のケースは分けて考えましょう。
($z=1$ のときもダブりが生じますが，±1 というのは後から追加する要素なので，最初は除外すればいいですね。)

ここまでくると (3), (4) は (2) の考察の一例を考えればよいことになります。

(3) は $i\in M$ のときですから，一撃で $M=\{1,\ -1,\ i,\ -i\}$ と特定されます。

(4) は 6 は $4k+2$ 型の数なので，$M=\{1,\ -1,\ z,\ \overline{z},\ -z,\ -\overline{z}\}$ という構造が決まります。

あとは，前半で考察した z^2 が M の要素であることを利用し，z^2 が上のどれかに対応することを用いて z を特定します。

この対応については偏角を捉えるのが分かりやすい方針でしょうか。

【解答】

(1) n は自然数なので，条件 (Ⅰ) より，$M\neq\varnothing$ で，$z\in M$ となる z が存在する。

このとき，条件 (Ⅱ) より，$\dfrac{1}{z}\in M$，$-z\in M$

条件 (Ⅲ) より $z\cdot\dfrac{1}{z}\in M$，$(-z)\cdot\dfrac{1}{z}\in M$，すなわち

$$1\in M,\ -1\in M$$

したがって，1，-1 は集合 M の要素である。

(2) ある自然数 k に対して，$z^k\in M$ であれば，$z\cdot z^k\in M$ なので，

$$z^{k+1}\in M$$

つまり，帰納的に $z^N\in M$ ($N=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) $\cdots$① となる。

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ($r>0$，$0\leqq\theta<2\pi$) とおく。

$r\neq1$ とすると，z，z^2，$\cdots$ は全て異なる複素数であり，① より M の要素の個数が有限個とならず，条件 (Ⅰ) に反する。

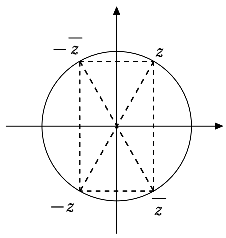
これより，$r=1$ であり，z は複素数平面上で円 $|z|=1$ 上にある。

このとき，$|z|^1=1$ であり，$z\overline{z}=1$ なので，条件 $z\neq0$ を考えると，

$$\overline{z}=\frac{1}{z}$$

条件 (Ⅱ) より，

$z\in M \Longrightarrow \overline{z}\in M$，$-z\in M$，$-\overline{z}\in M$



対称性から $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のときを考えれば十分である。

$z=\cos\theta+i\sin\theta\in M$ のとき，

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす z の値 1 つにつき，4 組の異なる M の要素が求められる。

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす $z\in M$ が k 個のときを考える。

この時点で，M の要素は $4k$ 個以上あることが確定する。

(i)　$i \notin M$ のとき

　1，-1 という 2 個も M の要素であることを考えると，

$$n=4k+2$$

(ii)　$i \in M$ のとき

　1，-1，i，$-i$ という 4 個も M の要素であることを考えると，

$$n=4k+4$$

よって，$n=4k+2$，または $n=4k+4$ であり，いずれにせよ n は偶数である。

(3)　$n=4$ のときなので，(ii) の場合の $k=0$ のときを考えればよい。

(ii) のときは $i \in M$ なので，M の要素が 4 個であることを考えると $M=\{1,\ -1,\ i,\ -i\}$ と一意的に M が決まる。

そしてこれは条件 (Ⅲ) も満たす。

(4)　$n=6$ のときなので，(i) の場合の $k=1$ のときを考えればよい。

このとき，$z=\cos\theta+i\sin\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を満たす $z\in M$ が 1 つ存在する。

よって，$M=\{1,\ -1,\ z,\ \overline{z},\ -z,\ -\overline{z}\}$

さて，z^2 も M の要素であるから，この 6 個のどれかに対応する。

$\arg z^2=2\theta$ で，$0<2\theta<\pi$ であるから，対応するのは $-\overline{z}$ である。

$$\begin{aligned} z^2=-\overline{z} &\iff z^2=-\frac{1}{z} \\ &\iff z^3=-1 \\ &\iff (z+1)(z^2-z+1)=0 \end{aligned}$$

$0<\arg z\ (=\theta)<\dfrac{\pi}{2}$ なので，$z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

よって，

$$M=\left\{1,\ -1,\ \frac{1+\sqrt{3}i}{2},\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right\}$$

と一意的に決まる。

そして，これは条件 (Ⅲ) も満たす。

【総括】

例題で学んだ手法を活かすならば，例えば，(4) で

$$M=\{1,\ -1,\ z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4\}$$

としてみます。

今，$z_1=\cos\theta+i\sin\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とします。

条件 (Ⅲ) から，これらの各々に z_1 をかけた

$$z_1,\ -z_1,\ z_1{}^2,\ z_1z_2,\ z_1z_3,\ z_1z_4$$

も M の要素です。

ダブりがないかどうかなど，細かなことは調べる必要がありますが，

$$M=\{z_1,\ -z_1,\ z_1{}^2,\ z_1z_2,\ z_1z_3,\ z_1z_4\}$$

とも表せるわけです。(詳しくは例題を参考に調べてみてください。)

M の要素全ての積に注目すると，$-z_1z_2z_3z_4=-z_1{}^6z_1z_2z_3z_4$

$z_1z_2z_3z_4 \neq 0$ なので，$z_1{}^6=1$ となり，z_1 は 1 の 6 乗根だと分かります。

z_1 は 1 の 6 乗根のうち第 1 象限にあるものですから $z_1=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ となります。