n を正の整数，a を実数とする。すべての整数 m に対して

$$m^2-(a-1)m+\frac{n^2}{2n+1}a>0$$

が成り立つような a の範囲を n を用いて表せ。

＜ '97 東京大 ＞

【戦略 1】

定義域が整数のみなので単純に判別式だけでどうにかなるレベルではありません。

最終的に求めるものは連続的に動くことが許される a という文字の範囲です。

視覚的に捉える作戦を考えると，「定数分離」するのが定石です。

分数関数になりますが，やってできなくない処理量なので，分かりやすさ優先で押し切ってしまいます。

なお，目がチカチカするため，$\dfrac{n^2}{2n+1}=c$ などとおいて，少しでも目に優しくします。

【解 1】

$m^2+m>a\left(m-\dfrac{n^2}{2n+1}\right)$ で，$c=\dfrac{n^2}{2n+1}$ （$c>0$）とおくと，

$$m^2+m>a(m-c) \quad \cdots (*)$$

$m-c=0$ のときは $m^2+m>0$ で，$m=c\ (>0)$ なので常に成立。

よって，$m-c>0$ のときと $m-c<0$ のときのみを考えればよい。

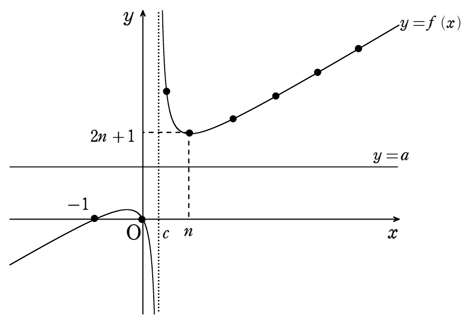
$$m-c>0 \text{ のとき，} (*) \Leftrightarrow \frac{m^2+m}{m-c}>a$$

$$m-c<0 \text{ のとき，} (*) \Leftrightarrow \frac{m^2+m}{m-c}<a$$

$f(x)=\dfrac{x^2+x}{x-c}$ とおくと，

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{(2x+1)(x-c)-(x^2+x)}{(x-c)^2}\\ &=\frac{x^2-2cx-c}{(x-c)^2}\\ &=\frac{x^2-\dfrac{2n^2}{2n+1}x-\dfrac{n^2}{2n+1}}{(x-c)^2}\\ &=\frac{(x-n)\left(x+\dfrac{n}{2n+1}\right)}{(x-c)^2} \end{aligned}$$

x	$\cdots$	$-\dfrac{n}{2n+1}$	$\cdots$	c		$\cdots$	n	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$			$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$	∞	$\searrow$	$2n+1$	$\nearrow$



図の黒丸は格子点を表す。

求める条件は $y=f(x)$ 上の格子点について

$x>c$ で黒丸が $y=a$ より上方，$x<c$ で黒丸が $y=a$ より下方

よって，$0<a<2n+1$ …答

【戦略 2】

分数関数を嫌うのであれば，「直線分離」でもできないことはありません。

水平ラインの上下で考える【戦略 1】の定数分離に比べて，少しだけ想像力をはたらかせて直線の動きを追っていく必要があるでしょう。

【解 2】

$m^2+m>a\left(m-\dfrac{n^2}{2n+1}\right)$ で，$c=\dfrac{n^2}{2n+1}$（$c>0$）とおくと，

$$m^2+m>a(m-c) \quad \cdots (*)$$

$y=x^2+x$ と $y=a(x-c)$ について考える。

この両者が接するとき

$$x^2+x=a(x-c) \quad \text{すなわち} \quad x^2-(a-1)x+ac=0 \quad \cdots ①$$

の判別式を D とすると，$D=0$ ゆえ

$$(a-1)^2-4ac=0$$

$$a^2-2(1+2c)a+1=0$$

$$a^2-2\left(1+\frac{2n^2}{2n+1}\right)a+1=0$$

$$(2n+1)a^2-(4n^2+4n+2)a+2n+1=0$$

$$\{a-(2n+1)\}\{(2n+1)a-1\}=0$$

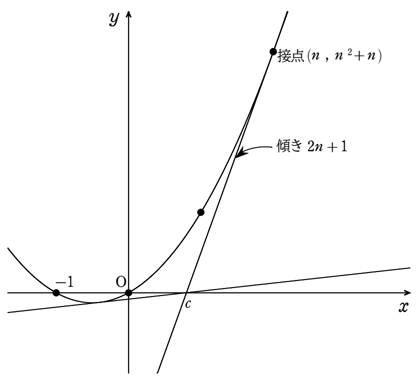
因数分解できます。

$a=2n+1$ のとき，接点の x 座標は ① の重解であり，

$$x=\frac{a-1}{2}=\frac{2n}{2}=n$$

$a=\dfrac{1}{2n+1}$ のとき，接点の x 座標は①の重解であり，

$$x=\frac{a-1}{2}=\frac{\frac{1}{2n+1}-1}{2}=\frac{-n}{2n+1}$$



図の黒丸は格子点を表す。

$(*)$ が全ての整数 m について成立するということは，$y=x^2+x$ 上の全ての格子点が，$(c, 0)$ を通る傾き a の直線 $y=a(x-c)$ の上方にあるということであり，題意を満たすための a の条件は

$$0<a<2n+1 \cdots 答$$

【総括】

文字が多く，文字によって立場も若干異なります。

・ m，n は離散的な整数
・ n は結論に用いてよい与えられた立場の文字
・ a は連続的に変化を許された実数

ですから，それぞれの立場を考えてモノを見る必要があります。

最終的に連続的に動かすものは a という認識で，

a を定数分離する　あるいは　直線を分離する

という作戦で見ました。

登場人物に実数という連続量が混ざってくる本問と，例題や類題 1 との解法で通用する部分やしない部分を比較・検討してみるのも一興です。