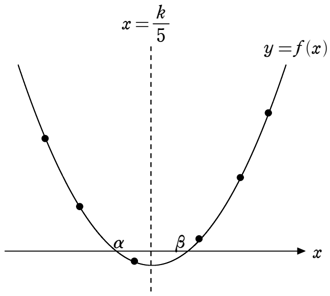
　k を正の整数とする。$5n^2-2kn+1<0$ を満たす整数 n がちょうど 1 個であるような k をすべて求めよ。

＜ '08 一橋大 ＞

【戦略 1】

$f(x)=5x^2-2kx+1$ $\left(=5\left(x-\dfrac{k}{5}\right)^2+1-\dfrac{k^2}{5}\right)$ **とおくと，**



というように，まず，$f\left(\dfrac{k}{5}\right)<0$ とならないと話になりません。

このことから，$1-\dfrac{k^2}{5}<0$ で，$k^2>5$ ですから $k=3,\ 4,\ 5,\ \cdots$ です。

例題の【戦略 1】同様，$f(x)=0$ の解 α，β $(\alpha<\beta)$ の幅に注目し

$$0<\beta-\alpha\leqq 2$$

ということに注目して k の範囲を絞っていきます。

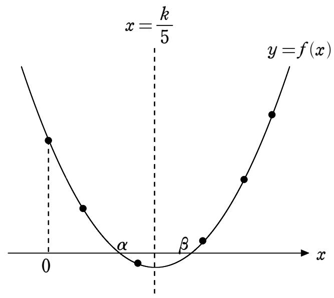
【解 1】

$$\begin{aligned} f(x)&=5x^2-2kx+1\\ &=5\left(x-\frac{k}{5}\right)^2+1-\frac{k^2}{5}\end{aligned}$$

とおく。

題意を満たすためには，$f\left(\dfrac{k}{5}\right)<0$，すなわち $1-\dfrac{k^2}{5}<0$ とならなければならず，これより $k^2>5$ であるため，$k=3,\ 4,\ 5,\ \cdots$ である。

このとき，軸の位置は $x>0$ の範囲にあり，$f(0)=1>0$ に注意すると



$f(x)=0$ の解を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると，

$$\alpha=\frac{k-\sqrt{k^2-5}}{5},\quad \beta=\frac{k+\sqrt{k^2-5}}{5}$$

$\beta-\alpha=\dfrac{2\sqrt{k^2-5}}{5}$ であり，$0<\beta-\alpha\leqq 2$ である必要がある。

（$0<\beta-\alpha$ については成り立つため，$\beta-\alpha\leqq 2$ について考える）

よって，$\dfrac{2\sqrt{k^2-5}}{5}\leqq 2$，すなわち $\sqrt{k^2-5}\leqq 5$

これを満たす 3 以上の整数 k は $k=3,\ 4,\ 5$

[1]：$k=3$ のとき

$\alpha=\dfrac{1}{5}$，$\beta=1$ であり，$f(x)<0$ の解は $\dfrac{1}{5}<x<1$ であり，この中に整数はない。

[2]：$k=4$ のとき

$\alpha=\dfrac{4-\sqrt{11}}{5}$，$\beta=\dfrac{4+\sqrt{11}}{5}$ であり，$f(x)<0$ の解は

$\dfrac{4-\sqrt{11}}{5}<x<\dfrac{4+\sqrt{11}}{5}$ であり，この中に整数は $x=1$ の 1 個である。

[3]：$k=5$ のとき

$\alpha=\dfrac{5-2\sqrt{5}}{5}$，$\beta=\dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}$ であり，$f(x)<0$ の解は

$\dfrac{5-2\sqrt{5}}{5}<x<\dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}$ であり，この中に整数は $x=1$ の 1 個である。

[1]，[2]，[3] より，求める整数 k は $k=4,\ 5$ …答

＜補足＞

解と係数の関係から $\begin{cases} \alpha+\beta=\dfrac{2k}{5} \\ \alpha\beta=\dfrac{1}{5} \end{cases}$ で，

$$\begin{aligned}(\beta-\alpha)^2&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\&=\frac{4k^2}{25}-\frac{4}{5}\\&=\frac{4(k^2-5)}{25}\end{aligned}$$

$\beta-\alpha>0$ であるため，$\beta-\alpha=\dfrac{2\sqrt{k^2-5}}{5}$ として処理してもよい。

【戦略 2】

$f(1)=6-2k$ の符号に注意します。

【解 2】部分的別解

$$\begin{aligned}f(x)&=5x^2-2kx+1\\&=5\left(x-\frac{k}{5}\right)^2+1-\frac{k^2}{5}\end{aligned}$$

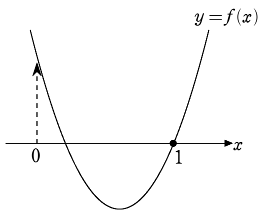
とおく。

題意を満たすためには，$f\left(\dfrac{k}{5}\right)<0$，すなわち $1-\dfrac{k^2}{5}<0$ とならなければならず，これより $k^2>5$ であるため，$k=3$，4，5，… である。

$f(1)=6-2k$ に注意する。

[1]：$k=3$ のとき

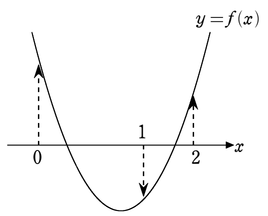
$f(1)=0$ であり，$f(n)<0$ となる整数 n は存在しない。



[2]：$k\geqq 4$ のとき

$f(1)<0$ である。

$f(n)<0$ を満たす整数 n が $n=1$ のみであればよく，$f(2)\geqq 0$ となればよい。



$f(2)=21-4k\geqq 0$

$k\leqq\dfrac{21}{4}$ であり，$4\leqq k\leqq\dfrac{21}{4}$

これを満たす整数 k は $k=4$，5

以上 [1]，[2] から，求める k の値は $k=4$，5 …答

【戦略 3】（数Ⅲの内容を含む）

与えられた不等式を

$$n>0 \quad \textbf{かつ} \quad \frac{1}{2}\left(5n+\frac{1}{n}\right)<k$$

と変形します。

定数分離という定番の考え方の一つですが，定義域が整数であることを踏まえて

曲線 $y=\dfrac{1}{2}\left(5x+\dfrac{1}{x}\right)$ が直線 $y=k$ の下にある部分の x の範囲に整数値が 1 個含まれるような k の範囲を考える

という言いかえをきちんとできるかが問題です。

【解 3】

$k>0$ であるため，$n\leqq 0$ のとき $5n^2-2kn+1$ の値は正の値となり題意の不等号を満たさない。

ゆえに，題意の不等式を満たす整数 n が存在するのであれば，その n は $n>0$ である。

このとき，$5n^2-2kn+1<0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(5n+\dfrac{1}{n}\right)<k$

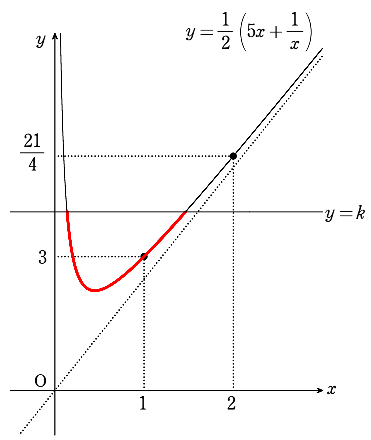
よって，曲線 $y=\dfrac{1}{2}\left(5x+\dfrac{1}{x}\right)$ が直線 $y=k$ の下にある部分の x の範囲に整数値が 1 個含まれるような k の範囲を考える。

$g(x)=\dfrac{1}{2}\left(5x+\dfrac{1}{x}\right)$ $(x>0)$ とすると，$g'(x)=\dfrac{1}{2}\left(5-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{5x^2-1}{2x^2}$

$x>0$ の範囲では

x	(0)	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$	$\cdots$	(∞)
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	∞	$\searrow$	$\sqrt{5}$	$\nearrow$	∞

という増減表を得る。



題意を満たすような k の範囲は $3<k\leqq\dfrac{21}{4}$

これを満たす正の整数 k は $k=4$，5 …答

【戦略 4】

題意の n があるとすれば，$n>0$ です。

そこで，与えられた不等式を

$$n(5n-2k)<-1$$

と見てやると，ざっくりと $5n-2k \geqq 0$ だとマズイことが見いだせます。

【解 4】

$k>0$ であるため，$n \leqq 0$ のとき $5n^2-2kn+1$ の値は正の値となり題意の不等号を満たさない。

ゆえに，題意の不等式を満たす整数 n が存在するのであれば，その n は $n>0$ である。

さて，与えられた不等式は

$$n(5n-2k)<-1$$

と変形でき，$n>0$ であることから，$5n-2k<0$ である必要がある。

必要条件

これより，$0<n<\dfrac{2k}{5}$

これを満たす整数 n がただ 1 つであるための正の整数 k は

$$k=3,\ 4,\ 5$$

であり，そのときの整数 n は $n=1$

[1]：$k=3$ のとき $5n^2-6n+1<0$，すなわち $\dfrac{1}{5}<n<1$ であり
これを満たす整数 n は存在しない。

[2]：$k=4$ のとき $5n^2-8n+1<0$，すなわち $\dfrac{4-\sqrt{11}}{5}<n<\dfrac{4+\sqrt{11}}{5}$
であり，これを満たす整数 n は $n=1$ のみ

[3]：$k=5$ のとき $5n^2-10n+1<0$，すなわち $\dfrac{5-2\sqrt{5}}{5}<n<\dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}$
であり，これを満たす整数 n は $n=1$ のみ

以上から，求める正の整数 k は $k=4,\ 5$ …答

【総括】

軸である $x=\dfrac{k}{5}$ に一番近い整数に注目する方針は 5 で割った余りで場合分けが発生するため，見送りたいと思います。

様々な解法が考えられますが，

【解 1】：必要性と十分性の確認

【解 2】【解 4】：観察力

【解 3】：言いかえ力

と，何かしら山場があります。