$p$，$q$ を素数とし，2 次関数

$$f(x)=x^2+px+q$$

が 2 つの条件

（ア）　ある実数 $a$ に対して $f(a)<0$

（イ）　任意の整数 $n$ に対して $f(n)\geqq 0$

を満たすとする。このとき $f(x)$ を求めよ。

＜ ’93　高知大 ＞

**【戦略 1】**

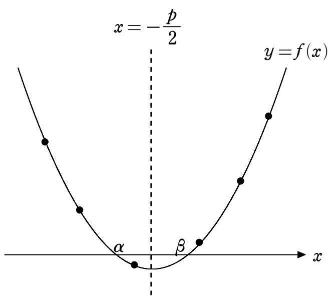
**条件（ア）については $x^2+px+q=0$ の判別式が正ということですぐに翻訳できますが，飛び飛びの整数 $n$ に対して $f(n)\geqq 0$ という条件（イ）が厄介です。**

**ひとまず，代入値が負となるような区間に整数が含まれないということは $f(x)=0$ の解 $\alpha$，$\beta$ に対して，**

$$|\alpha-\beta|\leqq 1$$

**である必要があります。**

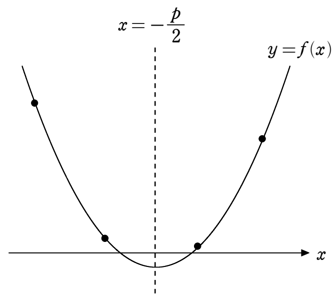
**注意したいのはあくまで必要条件であり，$|\alpha-\beta|\leqq 1$ を満たしているからと言って題意を満たしているわけではないということです。**




**ということもあり得る**

**なので，出てきた結論がきちんと題意をみたすかどうかについてはチェックしないといけません。**

**【解 1】**




条件（ア）から $f(x)=0$ の判別式を $D$ として，$D>0$

すなわち，$p^2-4q>0$

このとき，$f(x)=0$ の 2 つの実数解を $\alpha$，$\beta$ とすると，解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-p\\ \alpha\beta=q\end{cases}$$

よって，

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\&=p^2-4q\end{aligned}$$

題意を満たすとき，$|\alpha-\beta|\leqq 1$ となる必要がある。

よって，$0\leqq|\alpha-\beta|^2\leqq 1$ で，$0<p^2-4q\leqq 1$

ゆえに，$4q<p^2\leqq 4q+1$

$p$，$q$ は整数なので，$p^2=4q+1$

右辺は奇数なので，$p$ は奇素数ということになり，$p\geqq 3$

$$(p+1)(p-1)=4q$$

$p$ は奇素数ゆえ，ある整数 $m$ を用いて $p=2m+1$ と表せるため

$(2m+2)\cdot 2m=4q$　すなわち，$q=m(m+1)$ を得る。

素数 $q$ が連続 2 整数の積で表されることから，$m=1$ となるしかない。

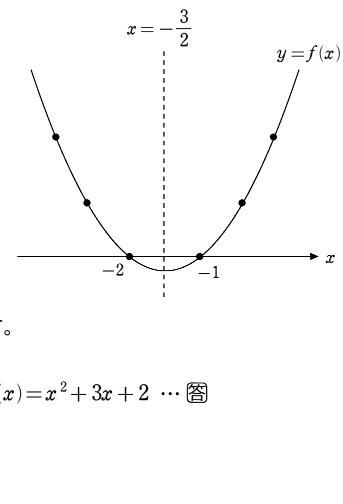
このとき，

$$p=3，q=2$$

以上から，

$$f(x)=x^2+3x+2$$

このとき，$f(x)=(x+1)(x+2)$ であり



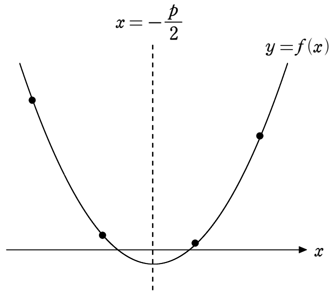

題意を満たす。

以上から，$f(x)=x^2+3x+2$ …答

【戦略 2】

**軸 $x=-\dfrac{p}{2}$ に一番近い整数 $m$ に対して $f(m)\geqq 0$ となれば題意を満たします。**

【解 2】部分的別解 $p^2=4q+1$ を得るまで




$y=f(x)$ の軸である $x=-\dfrac{p}{2}$ に一番近い整数を $m$ とする。

条件 (ア) より $f\left(-\dfrac{p}{2}\right)<0$ …①

$p=2$ のとき

$f\left(-\dfrac{p}{2}\right)=f(-1)$ で，① より $f\left(-\dfrac{p}{2}\right)<0$ であるが，条件 (イ) より $f(-1)\geqq 0$ であるため，$f\left(-\dfrac{p}{2}\right)\geqq 0$ となり矛盾する。

ゆえに，$p$ は奇素数であり，$m=-\dfrac{p-1}{2}$，$-\dfrac{p+1}{2}$ である。

条件 (イ) より，$f(m)\geqq 0$ である。

$$f\left(-\frac{p-1}{2}\right)=\left(-\frac{p-1}{2}\right)^2-p\cdot\frac{p-1}{2}+q$$
$$=\frac{(p-1)^2}{4}-\frac{p(p-1)}{2}+q$$

$$f\left(-\frac{p+1}{2}\right)=\left(-\frac{p+1}{2}\right)^2-p\cdot\frac{p+1}{2}+q$$
$$=\frac{(p+1)^2}{4}-\frac{p(p+1)}{2}+q$$

$f(m)\geqq 0$ であるため，

$$\frac{(p-1)^2}{4}-\frac{p(p-1)}{2}+q\geqq 0 \qquad \frac{(p+1)^2}{4}-\frac{p(p+1)}{2}+q\geqq 0$$

いずれにせよ

$$q\geqq\frac{1}{4}p^2-\frac{1}{4}\ \left(\Leftrightarrow\ p^2\leqq 4q+1\ \cdots①\right)$$

を得る。

一方，① より

$$\frac{p^2}{4}+p\cdot\left(-\frac{p}{2}\right)+q<0$$

これを整理すると，$4q<p^2$ …②

①，② より，$4q<p^2\leqq 4q+1$

$p^2$ が連続 2 整数 $4q$，$4q+1$ に挟まれており，等号に注意すると

$$p^2=4q+1$$

（以下【解 1】に準ずる）

【総括】

条件 (イ) が厄介で，特に【戦略 1】の路線での $0\leqq|\alpha-\beta|\leqq 1$ というものが必要条件にすぎず，十分性の確認をしなければならないことを見落としがちです。

また，【解 2】の路線は，軸が $x=-\dfrac{p}{2}$ であり，一番近い整数は

$$-\frac{p-1}{2},\ -\frac{p+1}{2}$$

とすぐに導出できるうえ，放物線の対称性から

$$f\left(-\frac{p-1}{2}\right)=f\left(-\frac{p+1}{2}\right)$$

ということが言えますから，処理にそこまで手間取ることはありませんでした。

しかし，軸が $x=-\dfrac{p}{7}$ などの場合，一番近い整数について考えるとなっても現実的ではないでしょう。