$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+e^x}\,dx$ の値を求めよ。

＜ '79 学習院大 ＞

【戦略】

対称的な積分区間を見たら，イヤでも偶関数・奇関数を意識するクセがあるはずです。

今回の積分区間を見ると，$f(x)=\dfrac{x^2}{1+e^x}$ に対して，$f(-x)$ を計算してみたくなります。(もちろん，$f(x)$ が偶関数や奇関数ではないことぐらい計算せずとも分かりますが，計算してみたくなる気持ちはもちたいところです。)

$f(-x)=\dfrac{(-x)^2}{1+e^{-x}}=\dfrac{x^2e^x}{1+e^x}$ **ですから，**

$$f(x)+f(-x)=\frac{x^2}{1+e^x}+\frac{x^2e^x}{1+e^x}$$

すなわち

$$f(x)+f(-x)=x^2$$

という結果を得ます。

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)+f(-x)\}\,dx=\int_{-1}^{1}x^2\,dx$$

から，$\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,dx+\int_{-1}^{1}f(-x)\,dx=\frac{2}{3}$ **です。**

$\displaystyle\int_{-1}^{1}f(-x)\,dx$ **について，$-x=t$ として f の中身を揃えたくなればしめたもので，この置換積分により**

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}f(-x)\,dx&=\int_{1}^{-1}f(t)(-dt)\\&=\int_{-1}^{1}f(t)\,dt\\&=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\end{aligned}$$

となりますから，$2\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\frac{2}{3}$ **，すなわち** $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\frac{1}{3}$ **となり，解決です。**

【解答】

$f(x)=\dfrac{x^2}{1+e^x}$ とおくと，

$$\begin{aligned}f(-x)&=\frac{(-x)^2}{1+e^{-x}}\\&=\frac{x^2}{1+\dfrac{1}{e^x}}\\&=\frac{x^2e^x}{e^x+1}\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}f(x)+f(-x)&=\frac{x^2}{e^x+1}+\frac{x^2e^x}{e^x+1}\\&=\frac{x^2(e^x+1)}{e^x+1}\\&=x^2\end{aligned}$$

これより，$\displaystyle\int_{-1}^{1}\{f(x)+f(-x)\}\,dx=\int_{-1}^{1}x^2\,dx$ ，すなわち

$$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx+\int_{-1}^{1}f(-x)\,dx=\frac{2}{3}\ \cdots①$$

ここで，$\displaystyle\int_{-1}^{1}f(-x)\,dx$ について，$-x=t$ とおくと，

$-dx=dt$，

x	$-1\ \to\ 1$
t	$1\ \to\ -1$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}f(-x)\,dx&=\int_{1}^{-1}f(t)(-dt)\\&=\int_{-1}^{1}f(t)\,dt\\&=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\quad(\because\ \text{定積分の値は積分変数によらない})\end{aligned}$$

① に代入すると，$2\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\frac{2}{3}$

ゆえに，$\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\frac{1}{3}$ であり，$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+e^x}=\frac{1}{3}$ …答

【総括】

例題のように $\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=\int_{0}^{a}\{f(-x)+f(x)\}\,dx$ などの誘導があれば問題にならないですが，かといって誘導がないと凶悪なレベルとなり，極端な難易度になってしまいます。

今回の戦略はロジカルに戦略をたてたというよりも，「形からこういうことをしてみたくなった」という形からくる感情的な戦略に近いです。
(実際自分が解いたときには試行錯誤を繰り返しました。)