次の問いに答えよ。

(1) a を正の定数とする。関数 $f(x)$ が区間 $[-a\ ,\ a]$ で連続であるとき

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{0}^{a}\{f(-x)+f(x)\}\,dx$$

が成り立つことを証明せよ。

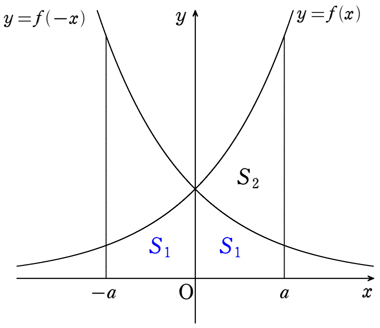
(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+e^{x}}\,dx$ を求めよ。

(3) 定積分 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{(\log x)^2}{1+x}\,dx$ を求めよ。

＜ ’19 静岡県立大 ＞

【戦略】

$y=f(x)$ のグラフを y 軸について対称移動したものが $y=f(-x)$ のグラフですからイメージで言えば



$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=S_1+S_1+S_2$$

$$\int_{0}^{a}\{f(-x)+f(x)\}\,dx=\int_{0}^{a}f(-x)\,dx+\int_{0}^{a}f(x)\,dx=S_1+(S_1+S_2)$$

なので，納得はいきますが，厳密性には欠けます。

ただ，式で押し通すにしても上のイメージで

$$\int_{-a}^{0}f(x)dx=\int_{0}^{a}f(-x)\,dx$$

というところが決め手になりそうなので，そこをキッチリ示します。

(2) **与えられた定積分の積分区間が原点について対称ですから，そのまま (1) が使えそうです。**

$f(x)=\dfrac{1}{1+e^{x}}$ **とすると，$f(-x)+f(x)$ はキレイに $f(-x)+f(x)=1$ となります。**

(3) **今度は一見すると積分区間に対称性がありませんから困り果ててしまうかもしれませんが，**

$$\int_{2^{-1}}^{2^{1}}$$

と見れるとしめたもので，$x=2^{t}$ という置換が浮かんできます。

【解答】

(1) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{-a}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ …①

ここで，$\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$ について，$x=-t$ とおくと

x	$-a\ \to\ 0$
t	$a\ \to\ 0$

$dx=-dt$

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{0} f(x)\,dx&=\int_{a}^{0} f(-t)(-dt)\\&=\int_{0}^{a} f(-t)\,dt\\&=\int_{0}^{a} f(-x)\,dx\quad(\because\ \text{積分変数は自由})\end{aligned}$$

① に代入すれば，
$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx&=\int_{0}^{a} f(-x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx\\&=\int_{0}^{a}\{f(-x)+f(x)\}\,dx\end{aligned}$$

となり，題意は示された。

(2) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{x}}$ とすると，

$$\begin{aligned}f(-x)+f(x)&=\frac{1}{1+e^{-x}}+\frac{1}{1+e^{x}}\\&=\frac{e^{x}}{e^{x}+1}+\frac{1}{1+e^{x}}\\&=1\end{aligned}$$

ゆえに，(1) の等式を用いると

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx&=\int_{0}^{1}\{\,f(-x)+f(x)\,\}dx\\&=\int_{0}^{1}1\,dx\\&=1\ \cdots 答\end{aligned}$$

(3) $I=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{(\log x)^2}{1+x}\,dx$ に対し，$x=2^{t}$ とすると

x	$\frac{1}{2}\ \to\ 2$
t	$-1\ \to\ 1$

$dx=(\log 2)\,2^{t}\,dt$

$$\begin{aligned}I&=\int_{-1}^{1}\frac{(\log 2^{t})^2}{1+2^{t}}(\log 2)\,2^{t}\,dt\\&=\int_{-1}^{1}\frac{(t\log 2)^2}{1+2^{t}}(\log 2)\,2^{t}\,dt\\&=\int_{-1}^{1}\frac{(\log 2)^3\,t^2\,2^{t}}{1+2^{t}}\,dt\end{aligned}$$

$g(t)=\dfrac{(\log 2)^3\,t^2\,2^{t}}{1+2^{t}}$ とおくと，

$$\begin{aligned}g(-t)+g(t)&=\frac{(\log 2)^3(-t)^2 2^{-t}}{1+2^{-t}}+\frac{(\log 2)^3\,t^2\,2^{t}}{1+2^{t}}\\&=\frac{(\log 2)^3\,t^2}{2^{t}+1}+\frac{(\log 2)^3\,t^2\,2^{t}}{1+2^{t}}\\&=\frac{(\log 2)^3\,t^2\,(2^{t}+1)}{2^{t}+1}\\&=(\log 2)^3\,t^2\end{aligned}$$

(1) の等式から

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} g(t)\,dt&=\int_{0}^{1}\{\,g(-t)+g(t)\,\}\,dt\\&=\int_{0}^{1}(\log 2)^3\,t^2\,dt\\&=(\log 2)^3\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1\\&=\frac{(\log 2)^3}{3}\ \cdots 答\end{aligned}$$

【戦略 2】(2) について

$\int \frac{1}{1+e^x}dx$ **は不定積分として求まります。**

【解 2】(2) について

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+e^x}dx &= \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx \\ &= \int \left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx \\ &= x-\log(1+e^x)+C \quad (\text{ C は積分定数 })\end{aligned}$$

ゆえに，
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+e^x}dx &= \Big[x-\log(1+e^x)\Big]_{-1}^{1} \\ &= \{1-\log(1+e)\}-\left\{-1-\log\left(1+\frac{1}{e}\right)\right\} \\ &= 2-\log(1+e)+\log\frac{e+1}{e} \\ &= 2-\log(1+e)+\log(e+1)-\log e \\ &= 1 \ \cdots \text{答}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+e^x}dx &= \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}(1+e^x)}dx \\ &= \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx \\ &= \int -\frac{(e^{-x}+1)'}{e^{-x}+1}dx \\ &= -\log(e^{-x}+1)+C \quad (\text{ C は積分定数 })\end{aligned}$$

ゆえに，
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+e^x}dx &= -\Big[\log(e^{-x}+1)\Big]_{-1}^{1} \\ &= -\left\{\log\left(\frac{1}{e}+1\right)-\log(e+1)\right\} \\ &= -\log\frac{\frac{1}{e}+1}{e+1} \\ &= -\log\frac{1+e}{e(e+1)} \\ &= -\log\frac{1}{e} \\ &= 1 \ \cdots \text{答}\end{aligned}$$

【総括】

(2) はノーヒントでも不定積分でも文句言えないですが，(3) は誘導がないとツライものがあります。

【 (1) の積分変数の自由性について 】

$$\int_0^1 x dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$
$$\int_0^1 t\, dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$
$$\int_0^1 y\, dy = \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

といったように，原始関数に対して，積分変数の中に 1，0 を代入して引くという作業をするため，

計算結果に積分変数は残りません

言わば積分変数とは「器の文字」であり，この器に 1，0 をぶち込んでいくので，器の文字はなんだってかまわないわけです。