xy 平面上，x 座標，y 座標がともに整数であるような点 (m, n) を格子点と呼ぶ。

各格子点を中心として半径 r の円がえがかれており，傾き $\frac{2}{5}$ の任意の直線はこれらの円のどれかと共有点をもつという。

このような性質をもつ実数 r の最小値を求めよ。

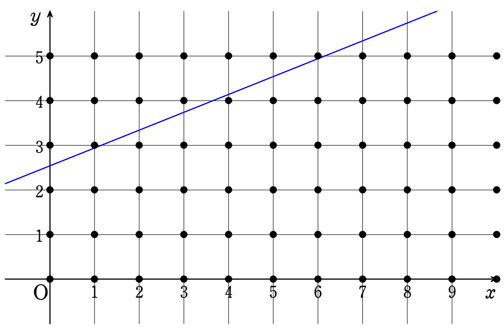
＜ '91 東京大 ＞

【戦略】

ひとまず，問題文で言われている意味を考えてみます。

直感的には r が大きければ「そりゃぶつかるやろ」という気がします。

逆に，r が小さい場合，極端な話ほとんど半径が 0 に近いような状態だとこの円はある意味「点」のようなもので，以下の図のように「すり抜けてしまう」ことがあるわけです。



題意をイメージできたところで，言われている条件を式で翻訳しなおします。

今回の傾き $\frac{2}{5}$ の直線は，$2x-5y-k=0$ という形で書けるため，k を任意の実数として動かすことで，直線を任意に動かすことにします。

$$\frac{|2m-5n-k|}{\sqrt{2^2+(-5)^2}} \leqq r$$

を満たすとき，直線 $2x-5y-k=0$ と (m, n) を中心とする半径 r の円が共有点をもちます。

つまり，問題で与えられた条件とは

任意の実数 k に対して，
$$|2m-5n-k| \leqq \sqrt{29}\,r$$
を満たすような整数 m，n が存在する。

ということです。

そして，$2m-5n$ は全ての整数を表すことができるため，結局は

任意の実数 k に対して，
$$|N-k| \leqq \sqrt{29}\,r$$
が成り立つような整数 N が存在する。

と言い換えることができ，この命題が真となるような r の最小値を考えることになります。

【解答】

傾き $\frac{2}{5}$ の任意の直線は，k を任意の実数として

$$2x-5y-k=0 \quad (\ell_k \text{ と呼ぶ})$$

と表せる。

格子点 (m, n) に対して

$$\frac{|2m-5n-k|}{\sqrt{2^2+(-5)^2}} \leqq r$$

が成立するとき，ℓ_k と格子点 (m, n) を中心とする半径 r の円は共有点をもつ。

ゆえに，

任意の実数 k に対して，
$$|2m-5n-k| \leqq \sqrt{29}\,r$$
を満たすような整数 m，n が存在する。 …… $(*)$

という命題 $(*)$ が真となるような r の最小値を求める。

$2m-5n$ という値において，$m=3N$，$n=N$ とすると

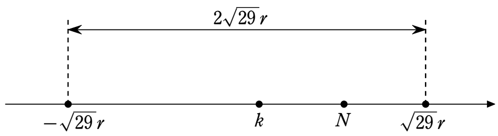
$$\begin{aligned} 2m-5n &= 2\cdot(3N)-5\cdot N \\ &= N \end{aligned}$$

となり，$2m-5n$ は全ての整数を表し得る。

このことから，命題 $(*)$ は

任意の実数 k に対して，
$$|N-k| \leqq \sqrt{29}\,r$$
が成り立つような整数 N が存在する。 …… $(*)'$

と言い換えられるため，$(*)'$ が真となるような r の最小値を求めればよい。



$2\sqrt{29}\,r \geqq 1$，すなわち $r \geqq \frac{\sqrt{29}}{58}$ のとき，$(*)'$ は真となる。

一方，$2\sqrt{29}\,r < 1$，すなわち $r < \frac{\sqrt{29}}{58}$ であるとき

$(*)'$ が真だと仮定すると，

$k=\frac{1}{2}$ に対しても，$\left|N-\frac{1}{2}\right| \leqq \sqrt{29}\,r$ が成り立つような整数 N が存在する。

このとき，$r < \frac{\sqrt{29}}{58}$ であるから，$\sqrt{29}\,r < \frac{1}{2}$ であり，$\left|N-\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$

これより，$0 < N < 1$ となるが，N が整数であることに矛盾する。

ゆえに，$r < \frac{\sqrt{29}}{58}$ のとき $(*)'$ は真ではない。

以上から，r の最小値は $\frac{\sqrt{29}}{58}$ …答

【総括】

「任意の○に対して～」という全称命題と，「ある○に対して～」という存在命題をしっかりと認識したいところです。

任意の　→　好きな，勝手な，どんな，全ての，……

ある　　→　うまい，適切な，……

といった類の言葉に置き換えて整理しましょう。

特に $r<\dfrac{\sqrt{29}}{58}$ のときに題意が成り立たないことを言いたいわけですが，$(*)'$ 自体に全称命題と存在命題が混在しているため，混乱しかねません。

$(*)'$ は

任意の ○ に対して，ある□が存在し，$**$ が成立する。
（ラフに：何をもってこられても，うまく選べば，$**$ が成立する。）

という命題で，これを否定すると

ある○が存在し，任意の□に対して，$**$ が成立しない
（ラフに：やばいやつがいて，どう頑張っても，$**$ が成立しない。）

ということになります。

$r<\dfrac{\sqrt{29}}{58}$ のときに $(*)'$ が成り立たないことをいうわけですが，

$k=\dfrac{1}{2}$ っていうやばいやつがいて，整数 N をどう頑張っても困る

という構造で $(*)'$ が成り立たないことを示すわけです。

【解答】ではそれを背理法でまとめました。