

双曲線の接線

双曲線 $H: x^2 - y^2 = 1$ 上の3点 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $C(s, t)$ ($t \neq 0$) を考える。

- 点 A における H の接線と直線 BC の交点を P とするとき、 P の座標を s, t を用いて表せ。
- 点 C における H の接線と直線 AB の交点を Q とするとき、 Q の座標を s, t を用いて表せ。
- 点 B における H の接線と直線 AC の交点を R とするとき、3点 P, Q, R は一直線上にあることを証明せよ。

< '17 大阪大 >

【戦略】

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 (x_0, y_0) における接線の式は

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

で与えられるため、(1), (2), (3) で登場する各接線の式を手際よく求めましょう。

ただし、 A, B における接線はこの接線公式に頼らずとも、それぞれ $x = -1, x = 1$ と求められます。

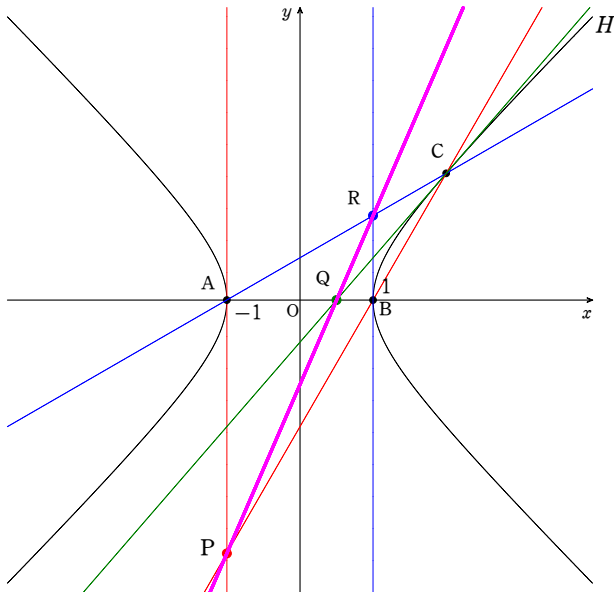
交点導出のため、連立方程式を解く作業については x 座標、 y 座標の片割れが即答で求まるので、実際には解いた「ふり」をすればよいでしょう。

(3) については

$$(\text{直線 } PQ \text{ の傾き}) = (\text{直線 } QR \text{ の傾き})$$

ということを目指せばよいだけです。

図がうるさくなるので、【解答】では別々にしますが、今回の問題の主張を一つの座標軸の中に図示すると以下ようになります。



【解答】

- (1) 点 $A(-1, 0)$ における接線の方程式は

$$x = -1 \dots \textcircled{1}$$

直線 BC の方程式は

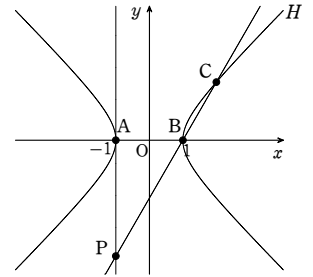
$$y = \frac{t}{s-1}(x-1) \dots \textcircled{2}$$

注: $s^2 - t^2 = 1$ で、条件 $t \neq 0$ から $s \neq \pm 1$

- ①, ② を連立して解くと

$$x = -1, y = -\frac{2t}{s-1}$$

以上から、 $P(-1, -\frac{2t}{s-1}) \dots \textcircled{\square}$



- (2) 点 $C(s, t)$ における H の接線の方程式は

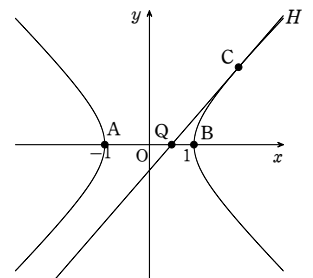
$$sx - ty = 1 \dots \textcircled{3}$$

直線 AB の方程式は $y = 0 \dots \textcircled{4}$

- ③, ④ を連立して解くと

$$x = \frac{1}{s}, y = 0$$

以上から、 $Q(\frac{1}{s}, 0) \dots \textcircled{\square}$



- (3) 点 $B(1, 0)$ における H の接線の方程式は

$$x = 1 \dots \textcircled{5}$$

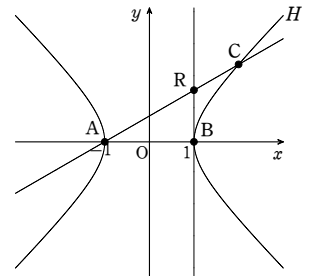
直線 AC の方程式は

$$y = \frac{t}{s+1}(x+1) \dots \textcircled{6}$$

- ⑤, ⑥ を連立して解くと

$$x = 1, y = \frac{2t}{s+1}$$

これより、 $R(1, \frac{2t}{s+1})$



$$\text{直線 } PQ \text{ の傾きは } \frac{0 - (-\frac{2t}{s-1})}{\frac{1}{s} - (-1)} = \frac{\frac{2t}{s-1}}{\frac{s+1}{s}} = \frac{2st}{s^2-1}$$

$$\text{直線 } QR \text{ の傾きは } \frac{\frac{2t}{s+1} - 0}{1 - \frac{1}{s}} = \frac{\frac{2t}{s+1}}{\frac{s-1}{s}} = \frac{2st}{s^2-1}$$

ゆえに、直線 PQ, QR は点 Q を共有し、傾きが等しいため P, Q, R は一直線上に存在する。

【総括】

難易度面では非常に基本的な問題であり、試験場では落とせません。

循環的に作った交点が一直線上に並ぶというのは中々興味深いですね。