円周上の３点による直角三角形

点Oを中心とする半径1の円周上に異なる3点A，B，Cがある。次を示せ。

(1)　△ABCが直角三角形ならば $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|=1$ である。

(2)　逆に，$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|=1$ ならば，△ABCが直角三角形である。

＜ ’01 大阪市立大 ＞

【戦略1】

(1)

ABが直径 または BCが直径 または CAが直径

ということから，

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{0} \text{ または } \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0} \text{ または } \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}=\vec{0}$$

と言えてしまうため

$$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OC}| \text{ または } |\overrightarrow{OA}| \text{ または } |\overrightarrow{OB}|$$

なので $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|=1$ となります。

(2)　**ひとまず，$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|^2=1$ という2乗処理をしたいところです。**

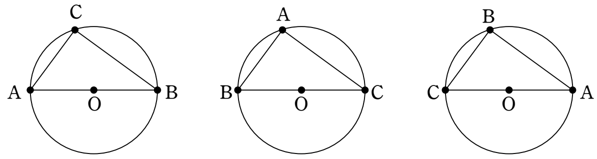
平面(2次元)では2本のベクトルで全て表現できます。
(UFOキャッチャーでも2つのボタンで十分でしょう。)

そこで $\overrightarrow{OC}=s\,\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{OB}$ (s，t は実数)などとして，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ という2本を主役ベクトル(基底)として考えていきます。

ただ，その際は，主役となる $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ が平行かどうかという場合分けが発生します。
(UFOキャッチャーでも2つのボタンが平行だったら叩き壊したくなるでしょう)

【解1】

(1)　△ABCが直角三角形のとき



ABが直径 または BCが直径 または CAが直径

つまり，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}$ または $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ または $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}=\vec{0}$

よって，

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC} \text{ または } \overrightarrow{OA} \text{ または } \overrightarrow{OB}$$

ゆえに，$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OC}|$ または $|\overrightarrow{OA}|$ または $|\overrightarrow{OB}|$

いずれの場合でも，$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|=1$

(2)　$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく。

$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=1$ のとき $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=1$

$$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})=1$$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ より，$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-1$ …(*) を得る。

(i)　$\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ のとき　$\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ (s，t は実数)と表せる。

(*)より，$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot(s\vec{a}+t\vec{b})+(s\vec{a}+t\vec{b})\cdot\vec{a}=-1$

$(1+s+t)\vec{a}\cdot\vec{b}+t\,|\vec{b}|^2+s\,|\vec{a}|^2=-1$

$(1+s+t)\vec{a}\cdot\vec{b}+1+s+t=0$

$(1+s+t)(\vec{a}\cdot\vec{b}+1)=0$ …①

$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\\&=\cos\theta\end{aligned}$$

で，$\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ より，$0<\theta<\pi$ であるため，$-1<\cos\theta<1$

つまり，$-1<\vec{a}\cdot\vec{b}<1$ …(☆) であるため，$0<\vec{a}\cdot\vec{b}+1<2$ となり，① から $1+s+t=0$ となるしかない。

つまり，$t=-s-1$ となり

$$\vec{c}=s\vec{a}-(s+1)\vec{b}$$

$|\vec{c}|^2=1$ より，$|s\vec{a}-(s+1)\vec{b}|^2=1$

$s^2|\vec{a}|^2-2s(s+1)\vec{a}\cdot\vec{b}+(s+1)^2|\vec{b}|^2=1$

$s^2-2s(s+1)\vec{a}\cdot\vec{b}+(s+1)^2=1$ （$\because |\vec{a}|=|\vec{b}|=1$）

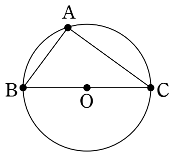
$2s^2+2s-2s(s+1)\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$2s(s+1)-2s(s+1)\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$2s(s+1)\{1-\vec{a}\cdot\vec{b}\}=0$

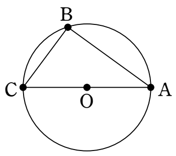
(☆) より $1-\vec{a}\cdot\vec{b}\neq 0$ であるため，$2s(s+1)=0$

$s=0$ のときは $\vec{c}=-\vec{b}$



よって，線分 BC が直径となり
△ABC は直角三角形

$s=-1$ のときは $\vec{c}=-\vec{a}$



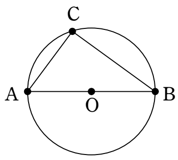
よって，線分 CA が直径となり
△ABC は直角三角形

以上から，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ のときは △ABC は直角三角形である。

(ii) $\vec{a}\parallel\vec{b}$ のとき

$|\vec{a}|=|\vec{b}|$ より，$\vec{a}=\vec{b}$ または $\vec{a}=-\vec{b}$

だが，A，B は異なる点であるという条件から $\vec{a}=-\vec{b}$ である。



よって，線分 AB が直径となり
△ABC は直角三角形

(i)，(ii) から

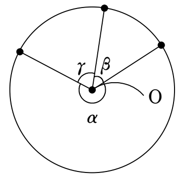
$$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|=1 \Longrightarrow \triangle ABC \text{ が直角三角形}$$

であることが示された。

【戦略 2】

大きさについての情報があるため，内積の情報は角度の情報に直結します。

そこで

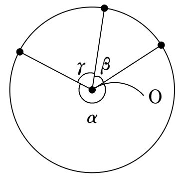


と，角度を設定し，三角関数によって仕留めることを考えます。

【解 2】(2) について

$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-1$ ⋯(∗) **を得るまでは【解 1】と同じ**

以下の図のように α，β，γ $(\alpha+\beta+\gamma=2\pi)$ とおく。



左図の 3 点は A，B，C のいずれかで
$\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ は
$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$
のどれかと 1 対 1 対応する。

ゆえに，(∗) は $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+1=0$ となる。

和積公式，及び半角公式から

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\cos^2\frac{\gamma}{2}=0$$

今，$\alpha+\beta+\gamma=2\pi$ より，$\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{2\pi-(\alpha+\beta)}{2}=\pi-\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ であるから

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\left\{\cos\left(\pi-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right\}^2=0$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}=0$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=0$$

和積公式から，$\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}=0$

$$\cos\left(\pi-\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}=0$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=0$$

$\dfrac{\alpha}{2}$，$\dfrac{\beta}{2}$，$\dfrac{\gamma}{2}$ は，$\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}+\dfrac{\gamma}{2}=\pi$ を満たす正の角であるため，

$\dfrac{\alpha}{2}$，$\dfrac{\beta}{2}$，$\dfrac{\gamma}{2}$ のどれかが $\dfrac{\pi}{2}$ と等しい。

これより，α，β，γ のどれかが π と等しいことになり，これは
△ABC の 1 辺が直径となることを意味するため，△ABC は直角三角形
である。

【総括】

(2) については少しスタミナが必要です。

なお，

$$\begin{cases} |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1 \\ |\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1 \end{cases} \Leftrightarrow \triangle\mathrm{ABC}\text{ は直角三角形}$$

とは言えません。

正しくは

$$\begin{cases} |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1 \\ |\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1 \\ \mathrm{O},\ \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C}\text{ が同一平面上} \end{cases} \Leftrightarrow \triangle\mathrm{ABC}\text{ は直角三角形}$$

です。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

【補足】

$\triangle\mathrm{ABC}$ の外心 O に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で定まる点 H について

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=0$$

が成り立ち，これは，H が $\triangle\mathrm{ABC}$ の垂心であることを意味します。

つまり，示すべきことは

O を中心とする半径 1 の円に内接する $\triangle\mathrm{ABC}$ の垂心を H としたとき

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=1 \Leftrightarrow \triangle\mathrm{ABC}\text{ が直角三角形}$$

ということなのですが，直角三角形 ABC の垂心は 3 頂点のどれかであることを考えると，この同値性はある程度納得いくものでしょう。

なお，三角形ABC の外心 O，重心 G，垂心 H について，

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=3\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ となり，これは，O，G，H が同一直線上にあることを意味します。
この O，G，H が乗っている直線は「オイラー線」と呼ばれる有名なものです。