実数 t に対して，xy 平面上の直線

$$(1-t^2)x-2ty=1+t^2$$

は，t の値によらずある円 C に接しているものとする。次の問に答えよ。

(1) 円 C の方程式を求めよ。また，接線の座標を求めよ。

(2) t が $t \geqq 1$ の範囲を動くとき，直線の通過する範囲を図示せよ。

＜ '02 神戸大 ＞

【戦略 1】

(1) **中心を $(a,\ b)$，半径を r としたとき**
円 C の中心と直線 $(1-t^2)x-2ty=1+t^2$ との距離が r というのが接する条件です。

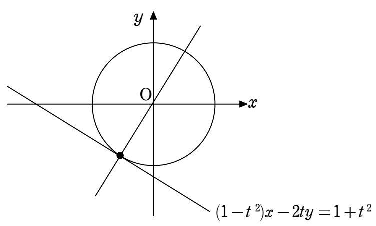
つまり，$\dfrac{|(1-t^2)a-2tb-t^2-1|}{\sqrt{(1-t^2)^2+4t^2}}=r$ が接する条件であり，
これが t の値に関わらず成立するということになります。

これを整理していき，t の恒等式として処理することになります。

絶対値の処理については無理に 2 乗せず，場合分けの方で処理した方が得策でしょう。

計算を正しく処理出来れば，C が $x^2+y^2=1$ として得られます。

接点については，
$(1-t^2)x-2ty=1+t^2$ と垂直で，原点を通る直線との交点として求めればよいでしょう。



(2) **接点が円上を動くのであれば，直線の通過領域はある程度目で追っていけるでしょう。**

t に範囲があるため，接点が $x^2+y^2=1$ 上の一部しか動けません。

その接点が動ける範囲を求めることに集中します。

(1) で，接点は $\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ -\dfrac{2t}{1+t^2}\right)$ と得られているはずです。

x 座標については $\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=-1+\dfrac{2}{1+t^2}>-1$

y 座標については逆数を取った，$\dfrac{1+t^2}{2t}$ が $\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)$ と，
相加・相乗平均で範囲が求まる目途が立つでしょう。

【解 1】

(1) 円 C の中心を $(a,\ b)$，半径を r $(r>0)$ とする。

$(1-t^2)x-2ty-t^2-1=0$ と点 $(a,\ b)$ との距離が t の値によらず r と等しくなる。

よって，$\dfrac{|(1-t^2)a-2tb-t^2-1|}{\sqrt{(1-t^2)^2+4t^2}}=r$

$$\frac{|(1-t^2)a-2tb-t^2-1|}{\sqrt{(1+t^2)^2}}=r$$

$$|(1-t^2)a-2tb-t^2-1|=r(1+t^2)$$

$$(1-t^2)a-2tb-t^2-1=\pm r(1+t^2)$$

[1] $(1-t^2)a-2tb-t^2-1=r(1+t^2)$ のとき

$$(a+r+1)t^2+2bt-a+r+1=0$$

これが t の値に関わらず成立するため

$$\begin{cases} a-r+1=0 \\ 2b=0 \\ -a+r+1=0 \end{cases}$$

これら 3 式から，$a=0$，$b=0$，$r=-1$ を得る。

これは $r>0$ を満たさず不適。

[2] $(1-t^2)a-2tb-t^2-1=-r(1+t^2)$ のとき

$$(a-r+1)t^2+2bt-a-r+1=0$$

これが t の値に関わらず成立するため

$$\begin{cases} a-r+1=0 \\ 2b=0 \\ -a-r+1=0 \end{cases}$$

これら 3 式から，$a=0$，$b=0$，$r=1$ を得る。

[1]，[2] から，求める円 C の方程式は

$$x^2+y^2=1 \ \cdots 答$$

また，接点について考える。

$(1-t^2)x-2ty=1+t^2$ $\cdots$ ① と垂直な直線で原点を通る直線

$$2tx+(1-t^2)y=0 \ \cdots ②$$

の交点が求める接点である。

①，② を連立方程式として解くと $(x,\ y)=\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ -\dfrac{2t}{1+t^2}\right)$ を得る。

ゆえに，求める接点は $\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ -\dfrac{2t}{1+t^2}\right)$ $\cdots$ 答

(2) $\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=-1+\dfrac{2}{1+t^2}>-1$

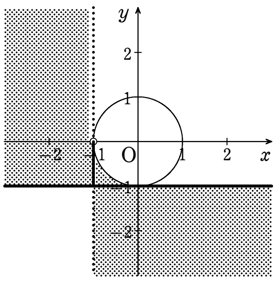
また，相加平均・相乗平均の関係から

$\dfrac{1+t^2}{2t}=\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)\geqq\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}}=1$（等号成立は $t=1$ のとき）

ゆえに，$-1\leqq-\dfrac{2t}{1+t^2}<0$

これより，接点 $(x,\ y)$ について $\begin{cases}-1<x\leqq0\\-1\leqq y<0\end{cases}$

ゆえに，求める直線 $(1-t^2)x-2ty=1+t^2$ の通過領域は以下の打点部。
（ただし，境界線については点線部は含まず，実線部は含む。）



【戦略 2】

t の値に関わらず接するという条件を「全称命題」と捉えることもできます。

つまり，

任意の t で $(1-t^2)x-2ty=1+t^2$ がある円 C に接するのだから
$t=0$ でも接するよね？

などという屁理屈をかまして，円 C の候補を浮かび上がらせるわけです。

【解 2】(1) 部分的別解

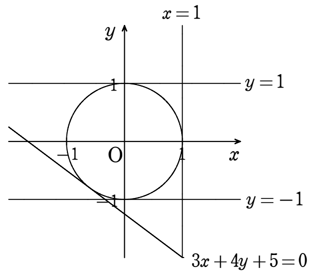
$(1-t^2)x-2ty=1+t^2$ …(*)

$t=-1$ のとき (*) は $y=1$

$t=0$ のとき (*) は $x=1$

$t=1$ のとき (*) は $y=-1$

$t=2$ のとき (*) は $3x+4y+5=0$



これら 4 本の直線と接する必要があり，題意の円が存在するとしたら

$$x^2+y^2=1$$

しか可能性はない。

また，$(0,\ 0)$ と (*) の距離を d とすると

$$\begin{aligned}d&=\frac{|-(1+t^2)|}{\sqrt{(1-t^2)^2+(-2t)^2}}\\&=\frac{|t^2+1|}{\sqrt{(1+t^2)^2}}\\&=\frac{|t^2+1|}{|1+t^2|}\\&=1\end{aligned}$$

であり，(*) は t の値に関わらず $x^2+y^2=1$ と接する。

以上から，題意の円 C は $x^2+y^2=1$ …答

【総括】

$$(1+x)t^2+2yt-x+1=0$$

が $t \geqq 1$ の範囲に少なくとも 1 つ実数解をもつという逆像法による通過領域の手法も考えられますが，処理は少々煩雑になります。
(やってできなくはないですが，それなりの処理力が必要です。)

なお，結果論から言うと，本問はワイエルシュトラスの置換と呼ばれる

$t=\tan\theta$ とおくと，

$$\cos 2\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin 2\theta=\frac{2t}{1+t^2}$$

と表せる

という置換を利用した円の包絡線を考えていることになります。

今回，与えられた直線 $(1-t^2)x-2ty=1+t^2$ は

$$\frac{1-t^2}{1+t^2}x-\frac{2t}{1+t^2}y=1$$

です。

$t=\tan(-\theta)$ とおくと，

$$\begin{aligned}\frac{1-t^2}{1+t^2}&=\frac{1-(-\tan\theta)^2}{1+(-\tan\theta)^2}\\&=\frac{1-\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\dfrac{1}{\cos^2\theta}}\\&=\cos^2\theta-\sin^2\theta\\&=\cos 2\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{2t}{1+t^2}&=\frac{-2\tan\theta}{1+(-\tan\theta)^2}\\&=\frac{-\dfrac{2\sin\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{1}{\cos^2\theta}}\\&=-2\sin\theta\cos\theta\\&=-\sin 2\theta\end{aligned}$$

なので，与えられた直線は

$$(\cos 2\theta)x+(\sin 2\theta)y=1$$

ということになり，円 $x^2+y^2=1$ 上の点 $(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$ における接線であることを意味します。