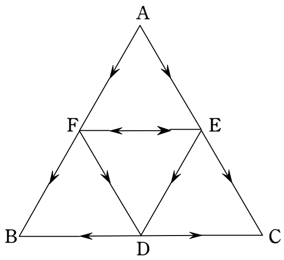
図のようなＡ～Ｆの６つの交差点からなる経路において，Ａから出発して何回かの移動でＢ，またはＣに到達したら静止するゲームがある。

ここで，１回の移動とは１つの交差点から斜め下方，または横に隣接する交差点まで進むこととし，斜め上方に進むことはできない。

移動可能な方向が２つある交差点では $\frac{1}{2}$ ずつの確率で，３つある交差点では $\frac{1}{3}$ の確率で進む方向が決まる。



(1)　３回以下の移動でＢに到達する確率を求めよ。

(2)　n 回以下の移動でＢに到達する確率を求めよ。

＜ '97 名古屋市立大 ＞

【戦略１】

(1)　**丁寧に** $\left\{\begin{array}{l}\textbf{2 回の移動で B に到達する場合}\\ \textbf{3 回の移動で B に到達する場合}\end{array}\right.$ **と場合分けをします。**

樹形図などを用いてパターンを全て書き出せばよいでしょう。

(2)　**n 回「以下」の移動でＢにいることは考えづらいです。**

２回の移動でＢにいる，３回の移動でＢにいる ……，n 回の移動でＢにいる　という事象を全て考えるのは少々骨が折れます。

そこで，直接が面倒なら … ということで余事象を考えます。

結局

$\left\{\begin{array}{l}n\ \textbf{回以下の移動で B にいる (確率}\ b_n\ \textbf{とする)}\\ n\ \textbf{回以下の移動で C にいる (確率}\ c_n\ \textbf{とする)}\\ n\ \textbf{回の移動で D，E，F のいずれかにいる (確率}\ p_n\ \textbf{とする)}\end{array}\right.$

というのが今回起こり得る全ての事象であるわけです。

「n 回以下の移動でＢにいる」の余事象は

「n 回の移動でゴールしていない (Ｄ，Ｅ，Ｆ のいずれかにいる) 」

または

「n 回以下の移動でＣ にいる」

ということになります。

ここで，b_n，c_n は対称性から同じであり，$b_n=c_n$ であることに気がつきたいところです。

つまり，$b_n+c_n+p_n=1$ で，$b_n=c_n$ であることを考えると，$2b_n+p_n=1$ であるため，p_n が分かれば解決ということになります。

p_n については，基本Ｅ，Ｆの往復なので，起こるべき事象はそこまで複雑なものではありません。

【解１】

(1)　[1]　２回の移動でＢに到達する場合

$$A\longrightarrow F\longrightarrow B$$

と移動し，その確率は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

[2]　３回の移動でＢに到達する場合

１回目　２回目　３回目

A ─ E ─ D ─ B ─ ①

A ─ E ─ F ─ B ─ ②

A ─ F ─ D ─ B ─ ③

① が起こる確率は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

② が起こる確率は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$

③ が起こる確率は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

よって，[2] の起こる確率は $\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{12}=\frac{2}{9}$

[1]，[2] より求める確率は $\frac{1}{6}+\frac{2}{9}=\frac{7}{18}$ …答

(2)　n 回以下の移動でＢにいる確率を b_n

n 回以下の移動でＣにいる確率を c_n

とする。

n 回以下の移動でＢまたはＣにいる

ということの余事象は

n 回の移動でＤ，Ｅ，Ｆ のいずれかにいる

ということであり，この確率を p_n とする。

以下，$n\geqq 2$ のとき p_n を求める。

１回目の移動ではＥ，Ｆどちらに移動してもよい。

２回目 ～ $n-1$ 回目までの $n-2$ 回の移動は

ＥとＦの往復を続ける

n 回目の移動では $\left\{\begin{array}{l}\text{E にいるならば F か D へ}\\ \text{F にいるならば E か D へ}\end{array}\right.$ 移動する 。

ゆえに，$p_n=1\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\times\frac{2}{3}=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$b_n+c_n=1-p_n$ であり，対称性から $b_n=c_n$ であるから

$2b_n=1-p_n$，すなわち $b_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}p_n=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ $(n\geqq 2)$

$n=1$ のとき $b_1=0$

以上から求める確率 b_n は $b_n=\left\{\begin{array}{ll}\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} & (n\geqq 2\ \text{のとき})\\ 0 & (n=1\ \text{のとき})\end{array}\right.$ …答

【戦略 2】(2) について

n 回以下の移動で B に到達する確率 b_n を直接考えるとなると

k 回後にはじめて B に到達する確率 B_k

を考えて

$$b_n = B_2 + B_3 + \cdots\cdots + B_n$$

を考えます。

B_k を考えるにあたっては，n 回の移動後に D，E，F にいる確率をそれぞれ d_n，e_n，f_n と設定していきます。

話を進めるにあたっては，番号を下げることに伴う「定義域」に注意します。

【解 2】(2) について

n 回以下の移動で B に到達する確率を b_n，
n 回の移動で初めて B に到達する確率を B_n とする。

また，n 回の移動で $\begin{cases} \text{D にいる確率を } d_n \\ \text{E にいる確率を } e_n \\ \text{F にいる確率を } f_n \end{cases}$ とする。

今，$f_1 = \dfrac{1}{2}$，$f_{n+1} = \dfrac{1}{3}e_n$ であり，対称性から $f_n = e_n$ であることに注意すると

$$f_1 = \frac{1}{2},\ f_{n+1} = \frac{1}{3}f_n \text{ であり，同時に } e_1 = \frac{1}{2},\ e_{n+1} = \frac{1}{3}e_n$$

つまり，数列 $\{f_n\}$，$\{e_n\}$ は初項 $\dfrac{1}{2}$，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$f_n = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1},\quad e_n = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

また，

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= \frac{1}{3}f_n + \frac{1}{3}e_n \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\times 2 \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

この式で定義されるのは
d_2，d_3，…
です。

であるため，$n \geqq 2$ のとき，$d_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

一方，

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= \frac{1}{3}f_n + \frac{1}{2}d_n \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad (n \geqq 2) \end{aligned}$$

この式で定義されるのは
B_3，B_4，…
です。

であるため，$n \geqq 3$ のとき $B_n = 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

したがって，

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^{n} B_k &= \sum_{k=1}^{n} 2\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} - \left(2 + \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{2\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{8}{3} \\ &= 3\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} - \frac{8}{3} \\ &= \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} b_n &= b_2 + \sum_{k=3}^{n} B_k \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

この式は $n=2$ のときは成り立つが，$n=1$ のときは成り立たない。

以上から求める確率 b_n は $b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} & (n \geqq 2 \text{ のとき}) \\ 0 & (n = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$ …㊎

【総括】

色々なところで

直接考えにくいときは余事象をとらえよ

ということが言われますが，そもそも

余事象を正しく言える力

があってこそのものです。

また，【解 1】 にせよ，【解 2】にせよ，対称性を活用することが求められました。