e を自然対数の底，π を円周率とする。また，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ $(x>0)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $y=f(x)$ のグラフを凹凸まで調べてかけ。

(2) e^{π} と π^{e} の大小を調べよ。

(3) π^2 と 2^{π} の大小を調べよ。

＜自作＞

【戦略】

(1) **丁寧に微分して調べるだけです。**

$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$ **を得ますが，$f'(x)$ の符号については $1-\log x$ の符号と一致しますから，$y=1$，$y=\log x$ のグラフの上下で判断します。**

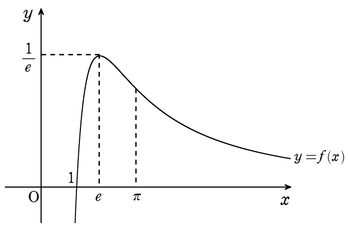
$f''(x)$ の符号についても同様に考えます。

(2) **2つの正の実数 a，b に対して**

$$
\begin{aligned}
& a^b \gtreqless b^a \\
\Leftrightarrow\quad & \log a^b \gtreqless \log b^a \\
\Leftrightarrow\quad & b\log a \gtreqless a\log b \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{\log a}{a} \gtreqless \frac{\log b}{b}
\end{aligned}
$$

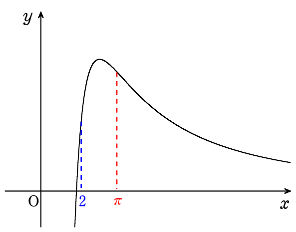
となるため，a^b，b^a の大小を調べたければ $f(a)$，$f(b)$ の大小を調べることになります。

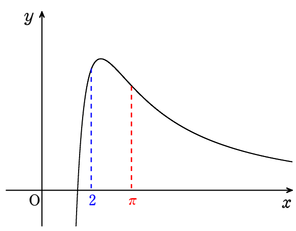
(1) で得られるグラフ



から，$f(\pi)<f(e)$ と言え，上述の考察を逆算してまとめます。

(3) **同様に $f(2)$ と $f(\pi)$ の大小を比較したいのですが，$2<e<\pi$ なので**

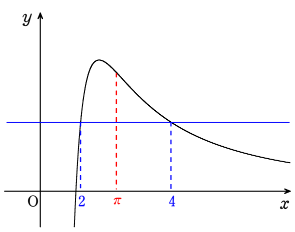




どちらなのかが単純には分かりません。

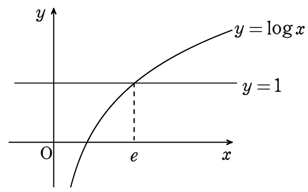
そこで，$2^4=4^2$ であることから $f(2)=f(4)$ であることを活かしていくと

$f(\pi)>f(4)=f(2)$ と言えます。

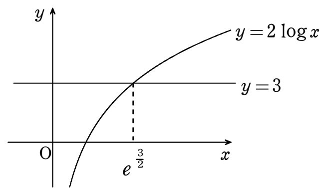


【解答】

(1) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot x-\log x}{x^2}=\dfrac{1-\log x}{x^2}$



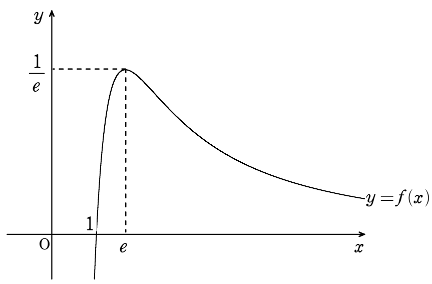
$$
f''(x)=\frac{-\dfrac{1}{x}\cdot x^2-2x(1-\log x)}{x^4}
=\frac{2\log x-3}{x^3}
$$



$x^2>0$ より，$f'(x)$ の符号は $1-\log x$ の符号と一致し，
$x>0$ より，$f''(x)$ の符号は $2\log x-3$ の符号と一致することに注意すると，以下の増減表を得る。

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\dfrac{1}{e}$	↘	$\dfrac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}$	↘	0

したがって，$y=f(x)$ のグラフは以下のようになる。



(2) $x>e$ の範囲で，$f(x)$ は単調減少であり，$e<\pi$ より，

$$f(\pi)<f(e)$$

$$\frac{\log\pi}{\pi}<\frac{\log e}{e}$$

$$e\log\pi<\pi\log e$$

$$\log\pi^{e}<\log e^{\pi}$$

底 e は 1 より大きいので，$\pi^e<e^{\pi}$ …答

(3)　$e<\pi<4$ より，$f(\pi)>f(4)$ …①

ここで，$f(2)=\dfrac{\log 2}{2}$，$f(4)=\dfrac{\log 4}{4}=\dfrac{2\log 2}{4}=\dfrac{\log 2}{2}$

よって，$f(2)=f(4)$ …②

①，② より，$f(\pi)>f(2)$

$$\frac{\log \pi}{\pi}>\frac{\log 2}{2}$$

$$2\log \pi>\pi\log 2$$

$$\log \pi^2>\log 2^\pi$$

底 e は 1 より大きいので，$\pi^2>2^\pi$ …答

【総括】

(1)，(2) までは定番の話題であり，実際の入試での出題も多々あります。

$x=e$ を挟んでいる場合の (3) は洞察力が問われるでしょう。

なお，(1) では，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であることを無断で使ってしまいましたがきちんとやるとなると

$x>e$ において，$\dfrac{1}{x}<\dfrac{\log x}{x}$

また，$g(x)=\sqrt{x}-\log x$　$(x>e)$ とおくと

$$\begin{aligned} g'(x)&=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\\ &=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}\end{aligned}$$

x	(e)	$\cdots$	4	$\cdots$	∞
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	$2-\log 4$	↗	

$g(x)\geqq 2-\log 4=\log e^2-\log 4>0$　，すなわち　$\log x<\sqrt{x}$

ゆえに，$x>e$ の範囲で，$\dfrac{1}{x}<\dfrac{\log x}{x}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ が成り立つ。

$x\to\infty$ のとき，$\dfrac{1}{x}\to 0$，$\dfrac{1}{\sqrt{x}}\to 0$ であり，はさみうちの原理から

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$$

などとすればよいでしょう。