三角形 ABC において，$\angle B=60^\circ$，B の対辺の長さ b は整数，他の 2 辺の長さ a，c はいずれも素数である。
このとき三角形 ABC は正三角形であることを示せ。

＜ '90 京都大 ＞

【戦略 1】

与えられた角度や長さの関係式を立式するにあたって，余弦定理を用いてやると

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2+c^2-2ac\cos 60^\circ \\ &= a^2+c^2-ac \end{aligned}$$

という関係式を得ます。

ここからの式変形をどうするかですが，$(\quad)^2-(\quad)^2$ という形を目指した因数分解を狙っていくことを考え

$$b^2=(a-c)^2+ac$$

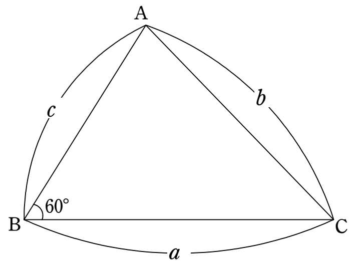
$$b^2-(a-c)^2=ac$$

$$\{b+(a-c)\}\{b-(a-c)\}=ac$$

と変形できれば，a，c が素数ということも効いてきて，一気に解決に向かいます。

ここからは手際の問題ですが，a，c に関する対称性を利用し，$a \geqq c$ などという設定で考えれば，労力は半分で済みます。

【解 1】



AB$=c$，BC$=a$，CA$=b$ とする。

余弦定理を用いると，

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2+c^2-2ac\cos 60^\circ \\ &= a^2+c^2-ac \\ &= (a-c)^2+ac \end{aligned}$$

これより，$b^2-(a-c)^2=ac$

$$\{b+(a-c)\}\{b-(a-c)\}=ac$$

$$\Leftrightarrow (b+a-c)(b+c-a)=ac \quad \cdots (*)$$

a，c に関する対称性から，$a \geqq c$ として考えて一般性を失わない。

また，三角形の成立条件から $b+c>a$ が成り立つことを考えると

$$b+a-c \geqq b+c-a>0$$

a，b，c が整数であり，特に a，c が素数であるという条件に注意して $(*)$ を満たす $b+a-c$，$b+c-a$ の組を考えると

$$(b+a-c,\ b+c-a)=(a,\ c),\ (ac,\ 1)$$

(i) $\begin{cases} b+a-c=a & \cdots ① \\ b+c-a=c & \cdots ② \end{cases}$ のとき

① より $b=c$
② より $a=b$

ゆえに，$a=b=c$ となり，△ABC は正三角形

(ii) $\begin{cases} b+a-c=ac & \cdots ③ \\ b+c-a=1 & \cdots ④ \end{cases}$ のとき

③－④ より，$2a-2c=ac-1$

$$ac-2a+2c=1$$

$$(a+2)(c-2)=-3$$

$$(a+2)(2-c)=3$$

$a+2>0$ より，$2-c>0$ であり，c は正の整数より $c=1$

これは c が素数であることに反する。

以上 (i)，(ii) より，△ABC は正三角形となる。

【戦略 2】

$b^2=a^2+c^2-ac$ **から** $b^2=(a-c)^2+ac$ **と見れなかった場合のリカバリーについて考えてみます。**

$b^2=a^2+c^2-ac$ **について，a，c のうち a について整理すると**

$$\begin{aligned} b^2&=a^2-ca+c^2 \\ &=\left(a-\frac{c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}c^2 \end{aligned}$$

分母を払って $\quad 4b^2=\left\{2\left(a-\dfrac{c}{2}\right)\right\}^2+3c^2$

$$4b^2=(2a-c)^2+3c^2$$

$$(2b+2a-c)(2b-2a+c)=3c^2$$

【解 1】と同じく $a \geqq c$ として考えてよく，$2b+2a-c \geqq 2b-2a+c>0$ **に注意すると**

$$\begin{cases} 2b+2a-c=3c^2 \\ 2b-2a+c=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2b+2a-c=3c \\ 2b-2a+c=c \end{cases} \quad \begin{cases} 2b+2a-c=c^2 \\ 2b-2a+c=3 \end{cases}$$

のケースを個別検証すればよいでしょう。

【解 2】部分的別解　$b^2=a^2+c^2-ac$　以降

$$b^2=\left(a-\frac{c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}c^2$$

これより，

$$4b^2=(2a-c)^2+3c^2$$
$$4b^2-(2a-c)^2=3c^2$$
$$(2b+2a-c)(2b-2a+c)=3c^2$$

a，c の対称性から $a \geqq c$ として考えてよく，このとき

$$2b+2a-c \geqq 2b-2a+c>0$$

であるため

$$\begin{cases} 2b+2a-c=3c^2 \\ 2b-2a+c=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2b+2a-c=3c \\ 2b-2a+c=c \end{cases} \quad \begin{cases} 2b+2a-c=c^2 \\ 2b-2a+c=3 \end{cases}$$

(i) $\begin{cases} 2b+2a-c=3c^2 & \cdots ① \\ 2b-2a+c=1 & \cdots ② \end{cases}$ のとき

①－② より，

$$4a-2c=3c^2-1$$
$$3c^2+2c-1=4a$$
$$(3c-1)(c+1)=4a$$

$c=2$ とすると，$5\cdot 3=4a$ となり，$a=\dfrac{15}{4}$ で不合理であるため c は奇素数である。

このとき，$c=2m+1$ $(m=1,\ 2,\ \cdots)$ の形で表せるため

$$(6m+2)(2m+2)=4a$$
$$a=(3m+1)(m+1)$$

で，a が 2 以上の整数同士の積で表せているため，a が素数であることに矛盾する。

(ii) $\begin{cases} 2b+2a-c=3c & \cdots ③ \\ 2b-2a+c=c & \cdots ④ \end{cases}$ のとき

④ より，$a=b$ を得て，③ から，$4a=4c$，すなわち $a=c$ を得る。

これより，$a=b=c$ であり，$\triangle$ABC は正三角形である。

(iii) $\begin{cases} 2b+2a-c=c^2 & \cdots ⑤ \\ 2b-2a+c=3 & \cdots ⑥ \end{cases}$ のとき

⑤－⑥ より，$4a-2c=c^2-3$

$$c^2+2c-3=4a$$

$$(c+3)(c-1)=4a$$

$c=2$ とすると，$5\cdot 1=4a$ で，$a=\dfrac{5}{4}$ となり不合理なので，c は奇素数。

このとき，$c=2m+1$ $(m=1,\ 2,\ \cdots)$ の形で表せるため

$$(2m+4)\cdot 2m=4a$$

$$(m+2)\cdot m=a$$

a が素数であるためには，$m=1$ となるしかなく，このとき

$$a=3,\ c=3$$

⑥ より，$2b-6+3=3$ であり，$b=3$

ゆえに，$a=b=c=3$ を得て，$\triangle$ABC は正三角形である。

以上から，$\triangle$ABC は正三角形となる。

【総括】

図形ならではの隠れた条件などに目を光らせておかないと，手が止まってしまったり，あるいは手が疲れてしまったりします。

【解 1】のようにスムーズに式変形できればいいですが，【解 2】のように

「文字の整理は 1 文字中心」

というセオリーに基づく式変形でも押し通せます。

ただ，若干処理が煩わしいのは否めません。

なお，【解 2】において，$\begin{cases} 2b+2a-c=3 \\ 2b-2a+c=c^2 \end{cases}$ のケースは c が素数であり $c^2 \geqq 4$ であることから考えなくてもよいでしょう。