6 枚のコインが全て表の状態で横 1 列に並んでおり，それぞれのコインには左から順に 1 番から 6 番までの数字が書かれている。このとき次の操作 (R) を考える。

(R)　1 から 6 までの目が等確率で出るサイコロを投げ，出た目を a としたとき，a の正の約数が書かれたコインを全て裏返す。

例えば操作 (R) を 2 回続けて行い，出た目が 6，3 であったとき，

表，表，表，表，表，表
↓
裏，裏，裏，表，表，裏
↓
表，裏，表，表，表，裏

という状態になる。以下の問いに答えよ。

(1)　操作 (R) を 3 回続けて行うとき，2 番のコインが表となっている確率を求めよ。
(2)　操作 (R) を 3 回続けて行うとき，3 番のコインが表となっている確率を求めよ。
(3)　操作 (R) を 3 回続けて行うとき，2 番のコインと 3 番のコインがともに表となっている確率を求めよ。
(4)　n を正の整数とし，操作 (R) を n 回続けて行ったとき，1 の目と 4 の目が一度も出なかった。このとき，表が出ているコインの枚数は偶数であることを示せ。

< 自作 >

【戦略】

(1)　**2 番のコインが表となっているかどうかが問題であり，その他の番号のコインがどうなっていようが知ったこっちゃありません。**

2 番のコインが表かどうかに集中しましょう。

事象 A：　3 回とも 1，3，5 の目が出る

または

事象 B：$\begin{cases} 2\text{回}\ 2,\ 4,\ 6\ \text{の目が出る} \\ \quad\text{かつ} \\ 1\text{回}\ 1,\ 3,\ 5\ \text{の目が出る} \end{cases}$

という事象に分類し、整理して考えます。

(2)　(1) **同様に**

事象 C：　3 回とも 1，2，4，5 の目が出る

または

事象 D：$\begin{cases} 2\text{回}\ 3,\ 6\ \text{の目が出る} \\ \quad\text{かつ} \\ 1\text{回}\ 1,\ 2,\ 4,\ 5\ \text{の目が出る} \end{cases}$

を考えて処理していきます。

(3)　事象 A ∩ C，事象 A ∩ D，事象 B ∩ C，事象 B ∩ D

という可能性について丁寧に場合分けをして考えていきます。

(4)　**番号は，もはやどうでもよく，とにかく表の枚数に集中します。**

そうなると気になるのは操作するコインの枚数に関する「偶奇」です。

2，3，5，6 の目が出たときは偶数枚のコインを裏返すことになりますが，1，4 の目が出たときだけ奇数枚のコインを裏返すことになります。

題意の主張的には，表が偶数枚の状態から偶数枚のコインを操作すると，結果の表枚数も偶数枚ということを示せば解決です。

表か裏かを数式的に表現するために，操作するコインを表記する記号を導入します。

$$\overrightarrow{x_1}=(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$$
$$\overrightarrow{x_2}=(1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$$
$$\overrightarrow{x_3}=(1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)$$
$$\overrightarrow{x_4}=(1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)$$
$$\overrightarrow{x_5}=(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0)$$
$$\overrightarrow{x_6}=(1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1)$$

という触るコインの番号の情報を含むような記号を導入します。

この記号についての演算として $\begin{cases} 0+0=0 \\ 0+1=1 \\ 1+0=1 \\ 1+1=0 \end{cases}$ **というように定めます。**

（**回路のオンオフの発想に似ています。**）

例えば，1 が出て，2 が出たとき

$$\overrightarrow{x_1}+\overrightarrow{x_2}=(0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$$

であり，確かに状態は

表，裏，表，表，表，表

というように整合性の取れる結果を得ます。

この記号の導入により，表の総枚数などが式として計算できるようになります。

【解答】

(1)　操作 (R) を 3 回続けて行い，2 番のコインが表となっているのは

「2 番のコインが最初の状態から一度も裏返されない」
または
「2 番のコインが 3 回中 2 回裏返される」

ということであり，それはすなわち

事象 A：　3 回とも 1，3，5 の目が出る

または

事象 B：$\begin{cases} \text{2 回 2，4，6 の目が出る} \\ \text{かつ} \\ \text{1 回 1，3，5 の目が出る} \end{cases}$

事象 A が起こる確率を $P(\mathrm{A})$，事象 B が起こる確率を $P(\mathrm{B})$ とする。

$$P(\mathrm{A})=\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{1}{8}$$

$$P(\mathrm{B})={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^1=\frac{3}{8}$$

事象 A，B は排反な事象であるから求める確率は

$$P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2} \quad \cdots 答$$

(2)　操作 (R) を 3 回続けて行い，3 番のコインが表となっているのは

「3 番のコインが最初の状態から一度も裏返されない」
または
「3 番のコインが 3 回中 2 回裏返される」

ということであり，それはすなわち

事象 C：　3 回とも 1，2，4，5 の目が出る

または

事象 D：$\begin{cases} \text{2 回 3，6 の目が出る} \\ \text{かつ} \\ \text{1 回 1，2，4，5 の目が出る} \end{cases}$

事象 C が起こる確率を $P(\mathrm{C})$，事象 D が起こる確率を $P(\mathrm{D})$ とする。

$$P(\mathrm{C})=\left(\frac{2}{6}\right)^3=\frac{8}{27}$$

$$P(\mathrm{D})={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{4}{6}\right)^1=\frac{2}{9}$$

事象 C，D は排反な事象であるから求める確率は

$$P(\mathrm{C})+P(\mathrm{D})=\frac{8}{27}+\frac{2}{9}=\frac{14}{27} \quad \cdots 答$$

(3)　題意を満たしているのは

事象 A ∩ C，事象 A ∩ D，事象 B ∩ C，事象 B ∩ D

の 4 つの事象のいずれかが起こるときである。

事象 A ∩ C：3 回とも 1，5 の目が出る

事象 A ∩ D：$\begin{cases} \text{2 回 3 の目が出る} \\ \text{かつ} \\ \text{1 回 1，5 の目が出る} \end{cases}$

事象 B ∩ C：$\begin{cases} \text{2 回 2，4 の目が出る} \\ \text{かつ} \\ \text{1 回 1，5 の目が出る} \end{cases}$

事象 B ∩ D：$\begin{cases} \text{2 回 6 の目が出る} \\ \text{かつ} \\ \text{1 回 1，5 の目が出る} \end{cases}$

$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})=\left(\frac{2}{6}\right)^3=\frac{1}{27}$$

$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{D})={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)^1=\frac{1}{36}$$

$$P(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)^1=\frac{1}{9}$$

$$P(\mathrm{B}\cap\mathrm{D})={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)^1=\frac{1}{36}$$

これら 4 つの事象は排反な事象であるから，求める確率は

$$\frac{1}{27}+\frac{1}{36}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}=\frac{11}{54} \quad \cdots 答$$

(4)
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{x_1}&=(1,0,0,0,0,0)\\
\overrightarrow{x_2}&=(1,1,0,0,0,0)\\
\overrightarrow{x_3}&=(1,0,1,0,0,0)\\
\overrightarrow{x_4}&=(1,1,0,1,0,0)\\
\overrightarrow{x_5}&=(1,0,0,0,1,0)\\
\overrightarrow{x_6}&=(1,1,1,0,0,1)
\end{aligned}$$

と定める。

$\overrightarrow{x_i}=(a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i)$（$a_i$ ～ f_i は 0 または 1）について

$\overrightarrow{x_i}$ の成分の 1 の個数は操作するコインの枚数ということができる。

また，$\begin{cases} 0+0=0 \\ 0+1=1 \\ 1+0=1 \\ 1+1=0 \end{cases}$　というように演算規則を定める。

このとき，$\overrightarrow{x_i}+\overrightarrow{x_j}$ の成分の 0 の個数は サイコロの目が i，j と出たときの表の枚数と一致する。

さて，

$\overrightarrow{x_i}$ の成分 a_i ～ f_i について 1 の個数が偶数個のとき

$$a_i+b_i+c_i+d_i+e_i+f_i \equiv 0 \pmod 2 \cdots ①$$

$\overrightarrow{x_j}$ の成分 a_j ～ f_j について 1 の個数が偶数個のとき

$$a_j+b_j+c_j+d_j+e_j+f_j \equiv 0 \pmod 2 \cdots ②$$

このとき $\overrightarrow{x_i}+\overrightarrow{x_j}$ の成分

(a_i+a_j)，(b_i+b_j)，……，(f_i+f_j) について

①+② より，

$$(a_i+a_j)+(b_i+b_j)+\cdots\cdots+(f_i+f_j) \equiv 0 \pmod 2$$

これはすなわち，$\overrightarrow{x_i}+\overrightarrow{x_j}$ の成分のうち，1 の個数が偶数個であることを意味する。

ゆえに，このとき，$\overrightarrow{x_i}+\overrightarrow{x_j}$ の成分のうち，0 の個数は偶数個。

以上から

コインを偶数枚操作＆偶数枚操作の結果，表の枚数は偶数枚

であることが言える。

同様にして

コインを奇数枚操作＆偶数枚捜査の結果，表の枚数は奇数枚

コインを奇数枚操作＆奇数枚操作の結果，表の枚数は偶数枚

ということが言える。

さて，1，4 の目が出ると，コインを 3 枚（奇数枚）操作する。

1，4 以外の目が出ると，コインを偶数枚操作する。

ゆえに 1 の目，4 の目が一度も出ない場合，偶数枚の操作のみとなり，表のコインの枚数は偶数であることがいえる。

【総括】

実際の試験場だとしたら (3) ぐらいまで確保できれば十分だと思います。

(4) については記号の力を借りて，説明を少しでも楽にするようにしましたが，日本語で説明できるのであればそれでも構わないでしょう。

ただ，数式や記号の力を借りないと 誤解なく表現することが難しいかもしれません。（数式や記号について誤解なく説明するのも難しいですが。）