

サイコロの目の約数と論証

6枚のカードに、1から6までの番号がつけられている。どのカードも一方の面が白色、もう一方の面が赤色である。はじめに、すべてのカードの白色の面を上にして番号順に並べる。次の操作をくり返し行う。

1個のさいころを投げる。

出た目の数が x であるとき、 x の約数である番号のカードをすべて裏返す。

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 1回目の操作の後で、番号2のカードの赤色の面が上になっている確率を求めよ。
- (2) 3回目の操作の後で、赤色の面が上になっているカードが2枚である確率を求めよ。
- (3) n 回目の操作の後で、すべてのカードの赤色の面が上になっているとする。このような n の最小値を求めよ。

< '14 奈良女子大 >

【戦略】

- (1) 1回の操作の後なので、6通り全て調べてもたかが知れています。

要するに、2のカードに手が付く2, 4, 6の目が出されればよいことになります。

- (2) ある程度実験してみると気づくと思いますが、

1は毎回必ず裏返されます

3回(奇数回)の操作後には必ず1のカードは赤面です。

なので、実質的には何か残り1個の数字が赤となっているかどうかに集中すればよいでしょう。

- (3) これもある程度実験してみると、5回の操作で全て赤にすることができます。

この5回については

①: 4, 5, 6を裏返すためには4, 5, 6が最低でも1回ずつ出る
(ここまでで合計3回の操作)

②: この時点で R W R R R R というように、2が白なので、これらをひっくり返すために2の目が1回出る。

③: この時点で W R R R R R なので、1の目が出る。

という感じで考えると1, 2, 4, 5, 6という具体例も出てくるでしょう。

なので、問題は4回以下で全て赤にできるかということになります。

ただ、上記実験①から最低でも3回は操作が必要だということになりますし、残り1回の操作を加えた合計4回の操作では

1のカードが確実に白色

で、4回の操作では全て赤にするのは無理だと確定し、解決です。

【解答】

- (1) 1回サイコロを投げて2を約数にもつ2, 4, 6の目が出る確率で

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} \dots \text{答}$$

- (2) 1のカードは毎回必ず裏返されるため、3回の操作後には1のカードは必ず赤面である。

- [1] 赤のカードが1, 2のとき

(2, 2, 2), (2, k , k) (k は2以外の目)
という目が出るときで、そうなる出方は

$$1 + 5 \cdot \frac{3!}{2!} = 16 \text{【通り】}$$

- [2] 赤のカードが1, 3のとき

(3, 3, 3), (3, k , k) (k は3以外の目)
という目が出るときで、そうなる出方は

$$1 + 5 \cdot \frac{3!}{2!} = 16 \text{【通り】}$$

- [3] 赤のカードが1, 5のとき

(5, 5, 5), (5, k , k) (k は5以外の目)
という目が出るときで、そうなる出方は

$$1 + 5 \cdot \frac{3!}{2!} = 16 \text{【通り】}$$

- [4] 赤のカードが1, 4のとき

(1, 2, 4)
という目が出るときで、そうなる出方は

$$3! = 6 \text{【通り】}$$

- [5] 赤のカードが1, 6のとき

(2, 3, 6)
という目が出るときで、そうなる出方は

$$3! = 6 \text{【通り】}$$

以上 [1] ~ [5] より、求める確率は $\frac{16+16+16+6+6}{6^3} = \frac{5}{18} \dots \text{答}$

- (3) 1, 2, 4, 5, 6 が出ると, 全てのカードが赤色になるため
5回の操作で全てのカードが赤色になり得る。

4回以下の操作で全てのカードが赤色にはなり得ないことを示す。

4回(偶数回)の操作では1の面は白色であるため, 4回の操作で
全てのカードを赤面にはすることはできない。

一方, 4, 5, 6のカードは, それぞれ4, 5, 6の目が出る時
しか裏返せないため, これらのカードが赤色となるには, 4, 5, 6の
目を出すために少なくとも3回の操作が必要である。

この時点では2のカードは白面であり, 操作の回数を重ねる
ことになる。

つまり, 3回では全てのカードを赤面にはすることはできない。

以上から, 4回以下の操作で全てのカードを赤面には
できない。

したがって, 求める n の最小値は 5 … 罫

【総括】

お腹がむずむずするようなもどかしさを感じると思います。

起こるべき現象を紙面上に誤解なく記述しようと思うと, 説明する方が難
しいかもしれません。