$0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$，$0 \leqq z \leqq 1$ の範囲で，

$$\frac{x+y+z}{3}+\sqrt{x(1-x)+y(1-y)+z(1-z)}$$

のとり得る値の最大値を求めよ。

＜ ’96 大分医科大 ＞

【戦略 1】

与えられた式は

$$\frac{x+y+z}{3}+\sqrt{x+y+z-(x^2+y^2+z^2)}$$

で，「大きくしよう大きくしよう」という気持ちがもてれば，

コーシー・シュワルツの不等式

で，

$$x+y+z \leqq \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$\vec{a}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ **とおいて，**

関係式

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \leqq |\vec{a}||\vec{b}|$

を用いた。

等号成立は $x=y=z$ **のとき**

とすれば

$$(\text{与式}) \leqq \frac{x+y+z}{3}+\sqrt{x+y+z-\frac{(x+y+z)^2}{3}}$$

と大きくできます。

つまり，与式を大きくしようと思うと，$x=y=z$ **とするのが最善であることが分かります。**

いわば予選決勝法における予選が終わり，決勝進出者が

$$\frac{x+y+z}{3}+\sqrt{x+y+z-\frac{(x+y+z)^2}{3}}$$

という状態です。

決勝進出者は $x=y=z$ **のときの式なので，**$x=y=z=t$ **として，**t **を動かす中で**

$$t+\sqrt{3t-3t^2}$$

の最大値を考えればよいでしょう。

微分法でもよいですが，ここでは逆像法を用いて

$t+\sqrt{3t-3t^2}=1$ **になるかな？，**$=2$ **になるかな？ ……**

という気持ちを込めて

$$t+\sqrt{3t-3t^2}=k$$

として，k **としてあり得る値の範囲を求めることで，**k **の最大値を求めます。**

【解 1】

$$(\text{与式})=\frac{x+y+z}{3}+\sqrt{x+y+z-(x^2+y^2+z^2)}$$

コーシー・シュワルツの不等式から

$$x+y+z \leqq \sqrt{1^2+1^2+1^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

すなわち，

$$x+y+z \leqq \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

を得る。(等号成立は $x=y=z$ のとき)

つまり，$x^2+y^2+z^2 \geqq \dfrac{(x+y+z)^2}{3}$ であるため，

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\frac{x+y+z}{3}+\sqrt{x+y+z-(x^2+y^2+z^2)}\\&\leqq \frac{x+y+z}{3}+\sqrt{x+y+z-\frac{(x+y+z)^2}{3}}\end{aligned}$$

$\dfrac{x+y+z}{3}=t$ とおくと，条件から $0 \leqq t \leqq 1$

このとき，

$$(\text{与式}) \leqq t+\sqrt{3t-3t^2} \quad \cdots (*)$$

であり，この右辺がとり得る値の範囲を調べる。

$k=t+\sqrt{3t-3t^2}$ とおくと，

$$4t^2-(2k+3)t+k^2=0 \quad \cdots (☆)$$

を満たす実数 t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲に少なくとも 1 つ存在するような k の範囲を調べればよい。

$f(t)=4t^2-(2k+3)t+k^2$ とおく。

$f(0)=k^2 \geqq 0$ ，$f(1)=(k-1)^2 \geqq 0$ に注意する。

$y=f(t)$ の軸 $t=\dfrac{2k+3}{8}$ について，$0 \leqq \dfrac{2k+3}{8} \leqq 1$

ここで，$k=t+\sqrt{3t-3t^2} \geqq 0$ に注意して，$0 \leqq k \leqq \dfrac{5}{2}$ …①

一方 $f(t)=0$ の判別式を D とすると，$D=(2k+3)^2-16k^2 \geqq 0$

整理すると，$(2k-3)(2k+1) \leqq 0$ で，$-\dfrac{1}{2} \leqq k \leqq \dfrac{3}{2}$ となるが，

$k \geqq 0$ に注意して，$0 \leqq k \leqq \dfrac{3}{2}$ …②

① かつ ② を満たす k の範囲は $0 \leqq k \leqq \dfrac{3}{2}$ であり，これが $(*)$ の右辺のとり得る値の範囲でもある。

特に，$k=\dfrac{3}{2}$ のとき，(☆) の解は $t=\dfrac{3}{4}$

したがって，(与式) $\leqq \dfrac{3}{2}$ であり，等号成立は $x=y=z=\dfrac{3}{4}$ のときである。

以上から，求める与式の最大値は $\dfrac{3}{2}$ …㊕

【戦略 2】

決勝戦において

$$t+\sqrt{3t-3t^2}$$

の最大値を考えるにあたり，逆像法が出てこなければ微分法でゴリゴリ押し通すことになるでしょう。

【解 2】部分的別解

$(\text{与式})\leqq t+\sqrt{3t-3t^2}$ として，
右辺のとり得る値の範囲を調べればよい
ことをいうまでは【解 1】と同じ

$g(t)=t+\sqrt{3t-3t^2}$ （$0\leqq t\leqq 1$）とおく。

$$g'(t)=1+\frac{-6t+3}{2\sqrt{-3t^2+3t}}$$

$0\leqq t\leqq\dfrac{1}{2}$ のときは，(第 2 項目の分子)$\geqq 0$ より，$g'(t)\geqq 0$ $\cdots$(a)

$\dfrac{1}{2}<t\leqq 1$ のときは $-6t+3<0$，すなわち $6t-3>0$ に注意して

$$\begin{aligned}g'(t)&=\frac{2\sqrt{-3t^2+3t}-(6t-3)}{2\sqrt{-3t^2+3t}}\\&=\frac{4(-3t^2+3t)-(6t-3)^2}{2\sqrt{-3t^2+3t}\left\{2\sqrt{-3t^2+3t}+(6t-3)\right\}}\\&=\frac{-3(4t-1)(4t-3)}{2\sqrt{-3t^2+3t}\left\{2\sqrt{-3t^2+3t}+(6t-3)\right\}}\end{aligned}$$

分子の有理化

よって，(a) と合わせて，$0\leqq t\leqq 1$ における $g(t)$ の増減表は以下のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{3}{4}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，$(\text{与式})\leqq g\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}+\sqrt{-3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2+3\cdot\frac{3}{4}}=\frac{3}{2}$

等号成立は $x=y=z=t=\dfrac{3}{4}$ のとき。

求める最大値は $\dfrac{3}{2}$ $\cdots$ 答

【総括】

決勝戦よりも予選の方がキツイものがあります。

正直

これだけ対称性があるんだからどうせ $x=y=z$ のときに最大だろ

という邪推が入るぐらいでないとコーシー・シュワルツの不等式は中々出てこないかもしれません。