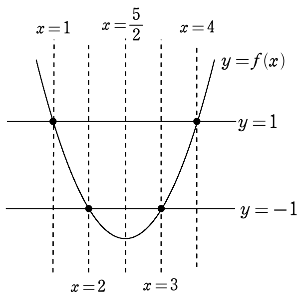
２次関数の決定

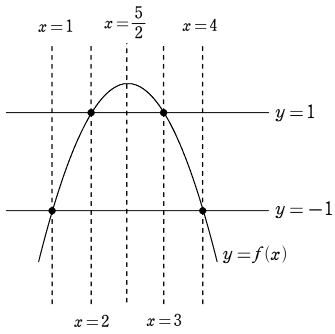
2 次関数 $f(x)$ は，$|f(1)|=|f(2)|=|f(3)|=|f(4)|=1$ を満たす。
$f(x)$ を求めよ。

＜ '04 東京電機大 ＞

【戦略】

放物線というグラフであることを考えると，条件を満たすためには





といういずれかの状況しかありえません。

そこで， $f(x)=ax^2+bx+c$ **というおき方ではなく，軸が** $x=\dfrac{5}{2}$ **である**

ことに注目した

$$y=a\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+q$$

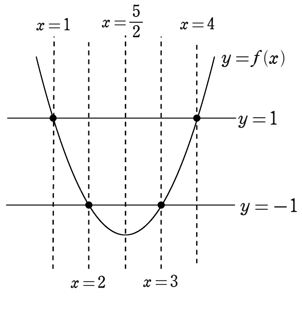
という形でおくのがよいでしょう。

この後も 4 点を代入する必要はなく，対称性から右半分（もしくは左半分）の通過点の立式で事足ります。

【解答】

$f(x)$ の軸は $x=\dfrac{5}{2}$ であるため，$f(x)=a\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+q$ と表せる。

(i)　$a>0$ のとき



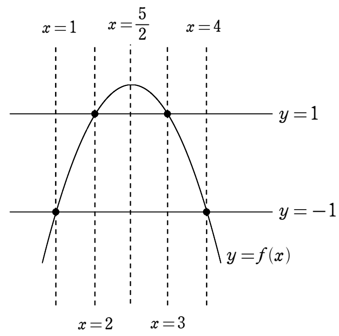
$(3，-1)，(4，1)$ を通るので

$$-1=a\left(3-\frac{5}{2}\right)^2+q \iff -1=\frac{1}{4}a+q$$
$$1=a\left(4-\frac{5}{2}\right)^2+q \iff 1=\frac{9}{4}a+q$$

これら 2 式から，$a=1$，$q=-\dfrac{5}{4}$

よって，$f(x)=\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}=x^2-5x+5$

(ii)　$a<0$ のとき



$(3，1)，(4，-1)$ を通るので

$$1=a\left(3-\frac{5}{2}\right)^2+q \iff 1=\frac{1}{4}a+q$$
$$-1=a\left(4-\frac{5}{2}\right)^2+q \iff -1=\frac{9}{4}a+q$$

これら 2 式から，$a=-1$，$q=\dfrac{5}{4}$

よって，$f(x)=-\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}=-x^2+5x-5$

以上 (i)，(ii) から，求める $f(x)$ は

$$f(x)=x^2-5x+5,\quad -x^2+5x-5 \cdots 答$$

【総括】

$f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ などとして

$$f(1)=\pm 1，f(2)=\pm 1，f(3)=\pm 1，f(4)=\pm 1$$

と式で押し通そうとするのは筋が悪いと言わざるを得ません。

状況の視覚化が強力にはたらくことを実感するいい例です。

まさに「簡単な難問」という類の問題で頭が固いと頭に血が昇るでしょう。

© MathClinic