(1) 自然数 n に対して，次の不等式を証明しなさい。

$$n\log n-n+1 \leqq \log(n\,!) \leqq (n+1)\log(n+1)-n$$

(2) 次の極限の収束，発散を調べ，収束するときにはその極限値を求めなさい。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n\,!)}{n\log n-n}$$

＜ ’06 首都大学東京（東京都立大）＞

【戦略】

(1) **例題で扱った問題が理解できていれば方針に困ることはないでしょう。**

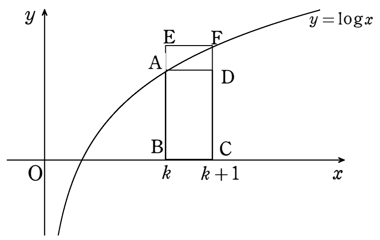
$\log(n\,!)=\sum_{k=1}^{n}\log k$ **と見て面積評価に持ち込みます。**

例題と違うのは，(*) の左側の不等式と右側の不等式に代入して辺々加える k の範囲が異なることですね．これは示すべき不等式の右辺に $(n+1)\log(n+1)$ という部分があることから自分で見抜けなければいけません。

(2) **(1) を利用し，はさみうちに持ち込みます．その際 $n\log n-n$ で辺々割る必要がありますが。**

これは $n=1$，2 だと負になって不等号の向きが変わってしまいますが，僕らは $n\to\infty$ のときを考えるのでそんな小さな n などに目をくれる必要はありません．$n\geqq 3$ として考えても問題はありません。

【解答】



(図 1)

(1) $\log(n\,!)=\sum_{k=1}^{n}\log k$ … ①

以下 $n\geqq 2$ とする。

(図 1) において，

（長方形 ABCD の面積）$<\int_k^{k+1}\log x\,dx<$（長方形 EBCF の面積）

であるから

$$\log k<\int_k^{k+1}\log x\,dx<\log(k+1) \quad \cdots(*)$$

(*) の右側の不等式に $k=1$，2，…，$n-1$ を代入して辺々加えると

$$\int_1^2\log x\,dx+\int_2^3\log x\,dx+\cdots+\int_{n-1}^{n}\log x\,dx \leqq \log 2+\log 3+\cdots+\log n$$

すなわち，$\int_1^n\log x\,dx \leqq \log 2+\log 3+\cdots\cdots+\log n$

$\log 1=0$ より右辺に $\log 1$ を加えてもよく

$$\int_1^n\log x\,dx \leqq \log 1+\log 2+\log 3+\cdots\cdots+\log n$$

$$\int_1^n\log x\,dx=\Big[x\log x-x\Big]_1^n=n\log n-n+1$$

これより，$n\log n-n+1\leqq\sum_{k=1}^{n}\log k$ が示された．… ②

一方，(*) の左側の不等式に $k=1$，2，……，n を代入して加えると

$$\log 1+\log 2+\cdots+\log n \leqq \int_1^2\log x\,dx+\int_2^3\log x\,dx+\cdots+\int_n^{n+1}\log x\,dx$$

ゆえに $\sum_{k=1}^{n}\log k \leqq \int_1^{n+1}\log x\,dx$

ここで，$\int_1^{n+1}\log x\,dx=\Big[x\log x-x\Big]_1^{n+1}=(n+1)\log(n+1)-n$

ゆえに，$\sum_{k=1}^{n}\log k \leqq (n+1)\log(n+1)-n$ … ③

②，③ より，$n\log n-n+1\leqq\sum_{k=1}^{n}\log k\leqq(n+1)\log(n+1)-n$

これは，$n=1$ のときも成立する。

① より，自然数 n に対して

$$n\log n-n+1\leqq\log(n\,!)\leqq(n+1)\log(n+1)-n$$

が成立する。

(2) $n\to\infty$ のときを考えるので $n \geqq 3$ で考えてよい。

このとき，$n\log n-n=n(\log n-1)>0$ だから (1) の不等式の辺々を $n\log n-n$ で割って

$$\frac{n\log n-n+1}{n\log n-n} \leqq \frac{\log(n\,!)}{n\log n-n} \leqq \frac{(n+1)\log(n+1)-n}{n\log n-n}$$

ここで，(最左辺)$=1+\dfrac{1}{n\log n-n} \to 1 \;(n\to\infty)$

$$(\text{最右辺})=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\log(n+1)}{\log n}-\frac{1}{\log n}}{1-\frac{1}{\log n}}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\log\left\{n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}}{\log n}-\frac{1}{\log n}}{1-\frac{1}{\log n}}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\log n+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}-\frac{1}{\log n}}{1-\frac{1}{\log n}}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right)-\frac{1}{\log n}}{1-\frac{1}{\log n}} \to 1 \;(n\to\infty)$$

はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n\,!)}{n\log n-n}$ は収束し，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n\,!)}{n\log n-n}=1$$ …㊟

【総括】

例題の考え方やストーリーが身についているかを確認するのにうってつけです。

【ウンチク】

ここから先は余談ですが，「スターリングの公式」と呼ばれる次のような事実があります。

もちろん解答中に前面に押し出すわけにはいかないですが。

n が十分大きいとき，$n\,! \fallingdotseq \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$

これを用いると (2) の極限値が推測できます。

$$\log(n\,!) \fallingdotseq \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+\log\sqrt{2\pi}$$

で，これを求める極限の式に代入してみると

$$\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+\log\sqrt{2\pi}}{n\log n-n}=\frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)-\frac{1}{\log n}+\frac{\log\sqrt{2\pi}}{n\log n}}{1-\frac{1}{\log n}}$$

$$\to\ 1\;(n\to\infty)$$

と，(2) の極限値が推測できます。