n を 2 以上の自然数とする。次の問いに答えよ。

(1) 不等式

$$n\log n-n+1<\sum_{k=1}^{n}\log k<(n+1)\log n-n+1$$

が成り立つことを示せ。

(2) 極限値 $\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n\log n}}$ を求めよ。

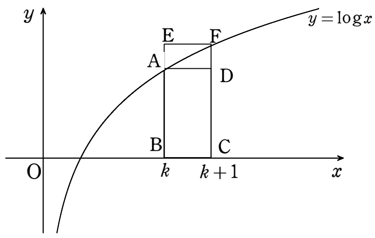
< '96 大阪大 >

【戦略】

(1) $\sum_{k=1}^{n}\log k=\log 1+\log 2+\cdots+\log n=\log(n!)$

ですが，$\log(n!)$ と見るのは (2) でしょう。

和を評価する手段の一つとして「面積評価」という方法があります。



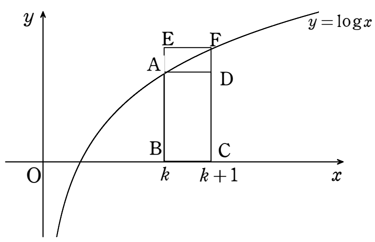
長方形 ABCD の面積が $\log k$，長方形 EBCF の面積が $\log(k+1)$ であり，

$$\log k<\int_{k}^{k+1}\log x\,dx<\log(k+1)$$

と評価し，$\sum$ すればよいでしょう。

(2) **(1) で得た不等式を用いて「はさみうちの原理」で仕留めます。**

【解答】



(図 1)

(1) (図 1) において，

(長方形 ABCD の面積)$<\int_{k}^{k+1}\log x\,dx<$(長方形 EBCF の面積)

であるから

$$\log k<\int_{k}^{k+1}\log x\,dx<\log(k+1)\quad\cdots(*)$$

$(*)$ に $k=1，2，\cdots\cdots，n-1$ を代入して辺々加えると

$$\sum_{k=1}^{n-1}\log k<\int_{1}^{2}\log x\,dx+\int_{2}^{3}\log x\,dx+\cdots\cdots+\int_{n-1}^{n}\log x\,dx<\sum_{k=1}^{n-1}\log(k+1)$$

すなわち，

$$\log 1+\log 2+\cdots\cdots+\log(n-1)<\int_{1}^{n}\log x\,dx<\log 2+\log 3+\cdots\cdots+\log n$$

$\log 1=0$ より最右辺に $\log 1$ を加えてもよく

$$\log 1+\log 2+\cdots+\log(n-1)<\int_{1}^{n}\log x\,dx<\log 1+\log 2+\log 3+\cdots+\log n\ \cdots ①$$

$$\int_{1}^{n}\log x\,dx=\Big[x\log x-x\Big]_{1}^{n}=n\log n-n+1$$

これより，① の右側の不等式から $n\log n-n+1<\sum_{k=1}^{n}\log k$ が示された。

① の左側の不等式より，

$$\log 1+\log 2+\cdots\cdots+\log(n-1)+\log n<n\log n-n+1+\log n$$

ゆえに $\sum_{k=1}^{n}\log k<(n+1)\log n-n+1$ が示された。

以上から，$n\log n-n+1<\sum_{k=1}^{n}\log k<(n+1)\log n-n+1$ が成立することが示された。

(2) $\sum_{k=1}^{n}\log k=\log 1+\log 2+\cdots\cdots+\log n=\log(1\times 2\times\cdots\times n)=\log(n!)$

(1) で示した不等式の辺々に $\dfrac{1}{n\log n}$ をかけて

$$\frac{1}{n\log n}(n\log n-n+1)<\frac{1}{n\log n}\cdot\log(n!)<\frac{1}{n\log n}\{(n+1)\log n-n+1\}$$

$$1-\frac{1}{\log n}+\frac{1}{n\log n}<\log(n!)^{\frac{1}{n\log n}}<1+\frac{1}{n}-\frac{1}{\log n}+\frac{1}{n\log n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\log n}+\frac{1}{n\log n}\right)=1,\quad\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{\log n}+\frac{1}{n\log n}\right)=1$$

ゆえに，はさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty}\log(n!)^{\frac{1}{n\log n}}=1$

これより，$\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n\log n}}=e$ …答

【総括】

この話題を扱ううえで，The 例題という問題です。

基本的に $\sum$ という和に関する評価を考える際の有力手段が面積評価です。

計算できない $\sum$ については，特にこの面積評価を疑います。

面積評価で得た不等式を用いてはさみうちの原理で仕留めるという流れも定番ですので，一連のストーリーを自分のものにしておきましょう。