次の問いに答えよ。

(1) $5!+4!+3!$ の値を求めよ。

(2) $a \geqq 4$ のとき，$a!+2$ は 2 の累乗になり得ないことを示せ。

(3) $a \geqq 6$ のとき，$\dfrac{a!}{2}+4$ は 2 の累乗になり得ないことを示せ。

(4) $a \geqq b \geqq c$ を満たす正の整数 a，b，c について，$S=a!+b!+c!$ とする。S が 2 の累乗になる整数の組 (a, b, c) をすべて求めよ。

＜ '15 鳥取大 ＞

【戦略】

(1) **計算するだけです。**

(2) **否定的命題であるため，背理法を睨み，**

$a!+2=2^k$ **となる自然数** k **が存在する**

と仮定します。

$$a!=2^k-2$$
$$=2(2^{k-1}-1)$$

は，$2\cdot$(奇数) という形のため，素因数 2 を 1 個しかもたないことになりますが，$a!$ は a が大きくなっていくと素因数 2 を沢山もち，1 個しかもたないなどということはあり得ません。

これをフォーマルに記述します。

(3) **シナリオについてほぼ (2) と同様です。**

(4) **ある程度数が大きくなってくるとヤバそうなのはここまでの流れからヒシヒシと感じますから，小さい方から探っていくということを考えていきます。**

少なくとも $c \geqq 3$ だと，S は素因数 3 をもってしまうので，$c=1$，2 しかありえないでしょう。

まずは $c=1$ のときです。（$S=a!+b!+1$）

基本 □! というのは偶数です。(奇数は $0!=1!=1$ のみ)

なので，$b \geqq 2$ だと，$a!$，$b!$ は偶数となり，S が奇数となってしまい 2 の累乗どころではなくなり，$b=1$ となるしかありません。

$c=1$，$b=1$ と特定できたのであれば，$S=a!+2$ です。

これは (1) から $a \geqq 4$ はダメなので，$a=1$，2，3 のいずれかとなり，個別検証すればよいでしょう。

次に $c=2$ のときですが，このとき $S=a!+b!+2=b!$(整数)$+2$ となります。

$b \geqq 4$ だと，S が 4 で割って 2 余ることになり，$S=2$ となるしかありませんが，$c=2$ の時点でそれは不可能です。

$b=2$ のときは $S=a!+4=2^p$ とおくと，$a!=2^2(2^{p-2}-1)$ ですから，$a!$ が素因数をちょうど 2 個もつことになり，不合理です。

$b=3$ のときは $S=a!+8$ となりますが，これについては (3) の議論で $a \geqq 6$ だとマズいので，$a=3$，4，5 となり，あとは個別検証です。

【解答】

(1) $5!+4!+3!=120+24+6=150$ …答

(2) $a \geqq 4$ のとき，$a!+2=2^k$ となる自然数 k が存在すると仮定する。

$$a!=2^k-2$$
$$=2(2^{k-1}-1) \quad \cdots ①$$

$k=1$ のとき，$a!=0$ となり，$a \geqq 4$ のときこの等式が成り立つことはない。

よって，$k \geqq 2$ で，$2^{k-1}-1$ は奇数であるから，① の右辺は素因数を 1 個しかもたない。

一方，① の左辺は $a \geqq 4$ のとき素因数 2 を 2 個以上もつ。

これは矛盾し，$a!+2$ は 2 の累乗にはなり得ないことが示された。

(3) $a \geqq 6$ のとき，$\dfrac{a!}{2}+4=2^\ell$ となる自然数 ℓ が存在すると仮定する。

$$a!+8=2^{\ell+1}$$

左辺は 8 より大きいので，$2^{\ell+1}>8(=2^3)$ であり，$\ell>2$

$$a!=2^{\ell+1}-8$$
$$=2^3(2^{\ell-2}-1) \quad \cdots ②$$

$\ell>2$ で，$2^{\ell-2}-1$ は奇数であるため ② の右辺は素因数 2 を 3 個しかもたない。

一方，② の左辺は $a \geqq 6$ のとき素因数 2 を 4 個以上もつ。

これは矛盾し，$\dfrac{a!}{2}+4$ は 2 の累乗にはなり得ないことが示された。

(4) [1] $c=1$ のとき

[1−1] $b=1$ のとき

$S=a!+2$ であり，(1) より，$a \geqq 4$ だと題意を満たさない。

$a=1$ のとき $S=3$ (不適)
$a=2$ のとき $S=4$ (適)
$a=3$ のとき $S=8$ (適)

$(a, b, c)=(2, 1, 1), (3, 1, 1)$

[1−2] $b \geqq 2$ のとき

$S=a!+b!+1$

今，$a \geqq b \geqq 2$ なので，$a!$，$b!$ はともに偶数であり

S は奇数となるため，2 の累乗にはなり得ない。

[2]　$c \geqq 2$ のとき

$$S=(c+A)!+(c+B)!+c\,! \\ =c\,!\,(\text{整数})$$

S は素因数 2 しかもたないため，$c=2$ である必要がある。

このとき，$S=a\,!+b\,!+2$
$$=(b+\alpha)!+b\,!+2 \\ =b\,!\,(\text{整数})+2$$

$b \geqq 4$ だと，$b\,!$ は 4 の倍数であるため，S は 4 で割って 2 余る。

S は 2 の累乗であるため，4 で割って 2 余るためには $S=2$ となるしかない。

このとき，$a\,!+b\,!+2=2$ で，$a\,!+b\,!=0$ となり，これを満たす正の整数 a，b は存在しない。

[2−1]　$b=2$ のとき

$S=a\,!+4$ であり，$a\,!+4=2^p$ $(p=3,\ 4,\ \cdots)$ とおく。

$$a\,!=2^p-4 \\ =2^2(2^{p-2}-1)$$

$a\,!$ は素因数 2 をちょうど 2 個もつが，$a \geqq 2$ の範囲でそのような a は存在しない。

[2−2]　$b=3$ のとき

$S=a\,!+8$ で (3) の議論から $a \geqq 6$ のときは題意を満たさない。

したがって，$a=3,\ 4,\ 5$ のいずれかである。

$a=3$ のとき $S=14$ (不適)
$a=4$ のとき $S=32\ (=2^5)$ (適)
$a=5$ のとき $S=128\ (=2^7)$ (適)

よって，$(a,\ b,\ c)=(4,\ 3,\ 2),\ (5,\ 3,\ 2)$

以上 {1}，[2] から，求める $(a,\ b,\ c)$ は

$(a,\ b,\ c)=(2,\ 1,\ 1),\ (3,\ 1,\ 1),\ (4,\ 3,\ 2),\ (5,\ 3,\ 2)$ … 答

【総括】

階乗というのは基本的に素因数を沢山持っており，数が大きくなれば，「〇の倍数」と言いやすくなります。

また，約数や倍数を拾うだけでなく，括った余りについても注目しやすいわけです。(例えば，$N\,!+3$ は $N \geqq 4$ だと 4 で割った余りが 3)

これは，整数問題の３大方針である

①：積の形からの約数拾い

②：余りで分類

③：範囲を絞り，評価する

におけるどの観点から見ても重要な性質と言えるでしょう。