x の整式 $f_n(x)$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)を

$$f_1(x)=3x^2+6x,\ f_{n+1}(x)=f_1(x)+\frac{1}{2}\int_0^1 f_n(x)\,dx$$

で定める。このとき，$f_n(x)$ を求めよ。

< '05 法政大 改 >

【戦略】

試しに $f_2(x)$ を求めてみます。

$$\begin{aligned} f_2(x) &= f_1(x)+\frac{1}{2}\int_0^1 f_1(x)\,dx \\ &= (3x^2+6x)+\frac{1}{2}\int_0^1 (3x^2+6x)\,dx \\ &= 3x^2+6x+\frac{1}{2}\Big[x^3+3x^2\Big]_0^1 \\ &= 3x^2+6x+2 \end{aligned}$$

となります。

このように実験をしてみると，$f_n(x)$ は

$$f_n(x)=3x^2+6x+\square$$

という 2 次式の構造をしていることが分かります。

もちろん，この $\square$ というのは n についての式で，こいつが求まれば $f_n(x)$ も求まるわけです。

【解答】

$a_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$ とおくと，$f_{n+1}(x)=3x^2+6x+\frac{1}{2}a_n$ $\cdots(*)$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx \\ &= \int_0^1 \left\{3x^2+6x+\frac{1}{2}a_n\right\}dx \quad (\because (*)) \\ &= \left[x^3+3x^2+\frac{1}{2}a_n x\right]_0^1 \\ &= 4+\frac{1}{2}a_n \end{aligned}$$

これは，$a_{n+1}-8=\frac{1}{2}(a_n-8)$ と変形できる。

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_0^1 f_1(x)\,dx \\ &= \int_0^1 (3x^2+6x)\,dx \\ &= \Big[x^3+3x^2\Big]_0^1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

よって，数列 $\{a_n-8\}$ は，初項 a_1-8 ($=-4$)，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるため

$$\begin{aligned} a_n-8 &= (-4)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \end{aligned}$$

これより，$a_n=8-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ を得る。

番号を下げるにあたり $n\geqq 2$ としておく必要があります。

$n\geqq 2$ のとき，$(*)$ から

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 3x^2+6x+\frac{1}{2}a_{n-1} \\ &= 3x^2+6x+\frac{1}{2}\left\{8-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}\right\} \\ &= 3x^2+6x+4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \quad \cdots(☆) \end{aligned}$$

(☆) で $n=1$ とすると，

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 3x^2+6x+4-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \\ &= 3x^2+6x \end{aligned}$$

となり，(☆) は $n=1$ のときも成立する。

以上から，$n=1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$f_n(x)=3x^2+6x+4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \quad \cdots 答$$

【総括】

$\int_0^1 f_n(x)\,dx$ という式は n の式であり，x から見たら定数扱いになる部分であるという基本が無意識レベルの常識であってほしいと思います。

この基本がないと，$a_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$ とおけないですし，おこうという気にもならないでしょう。

なお，原題は

(1) $f_2(x)$ を求めよ。

(2) $a_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$ とおく。a_{n+1} を a_n で表せ。

(3) $f_n(x)$ を求めよ。

という構成でした。

難関大を目指すにあたり，(1)，(2) は余計なお世話だと思えるだけの力は身につけておきましょう。