関数 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ を次によって定める。

$$f_1(x)=x\ ,\ \ f_n(x)=x+\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x+y}f_{n-1}(y)\,dy\ \ (n=2,3,\cdots)$$

このとき，$f_n(x)$，及び $\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ を求めよ。

＜ '91 名古屋大 ＞

【戦略 1】

得体の知れない関数に関する漸化式です。

ここはひとまず実験をしてみて，そこから何か一般項 $f_n(x)$ に繋がりそうな事実を探っていくところから始めましょう。

すると，$f_n(x)=x+\dfrac{\bigcirc-1}{\bigcirc e^x}$ という形になることを見いだせます。
この ○ についても推測するのはそんなに難しいものではないはずです。

あとは推測したものを帰納法で裏付ければ解決ですし，$\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ についてはボーナス問題です。

【解答】

$$\begin{aligned}f_2(x)&=x+\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x+y}f_1(y)\,dy\\&=x+\frac{1}{2}e^{-x}\int_0^1 ye^y\,dy\end{aligned}$$

ここで，$\displaystyle\int_0^1 ye^y\,dy=\Big[ye^y\Big]_0^1-\int_0^1 y\,dy=e-\Big[e^y\Big]_0^1=1$ …①

よって，$f_2(x)=x+\dfrac{1}{2e^x}$

また，

$$\begin{aligned}f_3(x)&=x+\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x+y}f_2(y)\,dy\\&=x+\frac{1}{2}e^{-x}\int_0^1 e^y\left(y+\frac{1}{2e^y}\right)dy\\&=x+\frac{1}{2}e^{-x}\int_0^1\left\{ye^y+\frac{1}{2}\right\}dy\\&=x+\frac{1}{2}e^{-x}\left\{1+\frac{1}{2}\right\}\ (\because ①)\\&=x+\frac{3}{4e^x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_4(x)&=x+\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x+y}f_3(y)\,dy\\&=x+\frac{1}{2}e^{-x}\int_0^1 e^y\left(y+\frac{3}{4e^y}\right)dy\\&=x+\frac{1}{2}e^{-x}\int_0^1\left\{ye^y+\frac{3}{4}\right\}dy\\&=x+\frac{1}{2}e^{-x}\left\{1+\frac{3}{4}\right\}\ (\because ①)\\&=x+\frac{7}{8e^x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_5(x)&=x+\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x+y}f_4(y)\,dy\\&=x+\frac{1}{2}e^{-x}\int_0^1 e^y\left(y+\frac{7}{8e^y}\right)dy\\&=x+\frac{1}{2}e^{-x}\int_0^1\left\{ye^y+\frac{7}{8}\right\}dy\\&=x+\frac{1}{2}e^{-x}\left\{1+\frac{7}{8}\right\}\ (\because ①)\\&=x+\frac{15}{16e^x}\end{aligned}$$

これより，$n=1,2,\cdots$ に対して，

$$f_n(x)=x+\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}e^x}\ \cdots(*)$$

と推測でき，これを数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき $f_1(x)=x$ で，$n=1$ のとき $(*)$ は成立する。

(ii) $n=k$ $(k=1,2,\cdots)$ のとき $(*)$ が成立すると仮定する。

すなわち $f_k(x)=x+\dfrac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}e^x}$ であると仮定する。

$$\begin{aligned}f_{k+1}(x)&=x+\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x+y}f_k(y)\,dy\\&=x+\frac{1}{2}e^{-x}\int_0^1 e^y\left(y+\frac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}e^y}\right)dy\ \ (\because\ 帰納法の仮定)\\&=x+\frac{1}{2}e^{-x}\int_0^1\left\{ye^y+\frac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}}\right\}dy\\&=x+\frac{1}{2}e^{-x}\left\{1+\frac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}}\right\}\ (\because ①)\\&=x+\frac{1}{2}e^{-x}\cdot\frac{2^k-1}{2^{k-1}}\\&=x+\frac{2^k-1}{2^ke^x}\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成立する。

以上から，$n=1,2,\cdots$ に対して，$f_n(x)=x+\dfrac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}e^x}$ …答

$$\begin{aligned}また，\lim_{n\to\infty}f_n(x)&=\lim_{n\to\infty}\left\{x+\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{e^x}\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{x+\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\cdot\frac{1}{e^x}\right\}\\&=x+\frac{1}{e^x}\ \cdots 答\end{aligned}$$

【戦略 2】

与えられた漸化式の積分変数は y なので，x を含む部分を $\int$ の外に出し，分母の e^x を払ってやると，積分方程式の定数型の処理で片付きます。

【解 2】$f_n(x)$ を出すところまで

$$f_n(x)=x+\frac{1}{2}e^{-x}\int_0^1 e^y f_{n-1}(y)\,dy$$

両辺に e^x をかけると，

$$\begin{aligned} e^x f_n(x)&=xe^x+\frac{1}{2}\int_0^1 e^y f_{n-1}(y)\,dy \\ &=xe^x+\frac{1}{2}\int_0^1 e^x f_{n-1}(x)\,dx \quad（\text{注：積分変数は自由}） \end{aligned}$$

$a_{n-1}=\int_0^1 e^x f_{n-1}(x)\,dx$ とおくと，

$$e^x f_n(x)=xe^x+\frac{1}{2}a_{n-1}\ (n\geqq 2)\ \cdots(☆)$$

両辺を 0 から 1 まで x で積分して

$$\int_0^1 e^x f_n(x)\,dx=\int_0^1 xe^x\,dx+\frac{1}{2}\int_0^1 a_{n-1}\,dx$$

これより，$a_n=1+\frac{1}{2}a_{n-1}$ を得る。

これは $a_n-2=\frac{1}{2}(a_{n-1}-2)$ と変形できるので，

$$a_n-2=(a_1-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

ここで，

$$\begin{aligned} a_1&=\int_0^1 e^x f_1(x)\,dx \\ &=\int_0^1 xe^x\,dx \\ &=\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx \\ &=e-\Big[e^x\Big]_0^1 \\ &=1 \end{aligned}$$

よって，$a_n-2=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ で

$$a_n=2-\frac{1}{2^{n-1}}$$

(☆) に代入し，
$$\begin{aligned} e^x f_n(x)&=xe^x+\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2^{n-2}}\right) \\ &=xe^x+\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

よって，$f_n(x)=x+\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}e^x}$（これは $n=1$ でも成立する）

【総括】

一般的に解くという【解 2】の路線でできなかったとしても，【解 1】のように実験して予想を立て，帰納法で裏付けることは可能ですし，逆に実験から結論が予想できなくても，積分方程式の基本が身についていれば一般項まで辿り着けます。

ただ，その場合は積分変数の扱いに習熟している必要があり，そのレベルの人はそもそも実験で一般項を予想するだけの力があるでしょうから，基本的にはこの問題はオールオアナッシングとなりやすく，差がつくレベルと言えましょう。

本問は $f_n(x)$ と $\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ の両方を問いかけてくれていますから，$f_n(x)$ が求まると判断できますが，$\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ だけ聞かれた場合，$f_n(x)$ が直接出るか出ないかの方針決定のための時間とエネルギーがさらにかかるでしょう。