m^4+14m^2 が $2m+1$ の整数倍となるような整数 m をすべて求めよ。

＜ '13 千葉大 ＞

【戦略】

例題に倣った解法で倒します。

【解 1】

m^2 と $2m+1$ の最大公約数を G とすると

$$\begin{cases} m^2=G\alpha \\ 2m+1=G\beta \end{cases} \quad (\alpha,\ \beta \text{ は互いに素な整数})$$

と表せる。

$2m=G\beta-1$ であり，両辺 2 乗すると，$4m^2=(G\beta-1)^2$

これより，

$$4G\alpha=(G\beta-1)^2$$

$$4G\alpha=G^2\beta^2-2G\beta+1$$

$$G(4\alpha-G\beta^2+2\beta)=1$$

G，$4\alpha-G\beta^2+2\beta$ は整数なので，$G=1$ であり，

m^2，$2m+1$ は互いに素 …①

である。

$\dfrac{m^2(m^2+14)}{2m+1}$ が整数という条件は ① より $\dfrac{m^2+14}{2m+1}$ が整数という条件ということになる。

$$\frac{m^2+14}{2m+1}=M\ (M \text{ は整数}) \Longrightarrow \frac{4(m^2+14)}{2m+1}=4M$$

4 と奇数 $2m+1$ は互いに素であるため，

$$\frac{4(m^2+14)}{2m+1}=N\ (N \text{ は整数}) \Longrightarrow \frac{m^2+14}{2m+1} \text{ は整数}$$

つまり，

$$\frac{m^2(m^2+14)}{2m+1} \text{ が整数} \Longleftrightarrow \frac{m^2+14}{2m+1} \text{ が整数} \Longleftrightarrow \frac{4(m^2+14)}{2m+1} \text{ が整数}$$

よって，$\dfrac{4(m^2+14)}{2m+1}$ が整数となる m を求めればよい。

$$\frac{4m^2+56}{2m+1}=\frac{(2m+1)(2m-1)+57}{2m+1}$$

$$2m-1+\frac{57}{2m+1}=(\text{整数})$$

すなわち，$\dfrac{57}{2m+1}=(\text{整数})$ であり，$2m+1$ は 57 の約数である。

$$2m+1=\pm1,\ \pm3,\ \pm19,\ \pm57$$

$$\therefore\ m=-29,\ -10,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 9,\ 28 \cdots \text{答}$$

【解 2】部分的別解

「$\dfrac{m^2+14}{2m+1}$ が整数 であるような m を求めればよい」という部分までは【解 1】と同じ

条件より，$m^2+14=k(2m+1)$ (k は整数) と表せる。

$$m^2-2km+14-k=0$$

$$(m-k)^2=k^2+k-14$$

k^2+k-14 は平方数であり，$k^2+k-14=L^2$ (L は 0 以上の整数)

$$\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{57}{4}=L^2$$

$$(2k+1)^2-57=4L^2$$

$$\{(2k+1)+2L\}\{(2k+1)-2L\}=57$$

$2k+1-2L \leqq 2k+1+2L$ に注意すると

$2k+1-2L$	1	3	-57	-19
$2k+1+2L$	57	19	-1	-3

$\begin{cases} 2k+1-2L=u \\ 2k+1+2L=v \end{cases}$ のとき $(k,\ L)=\left(\dfrac{u+v-2}{4},\ \dfrac{-u+v}{4}\right)$ であり

$$(k,\ L)=(14,\ 14),\ (5,\ 4),\ (-15,\ 14),\ (-6,\ 4)$$

$m=k\pm L$ なので，

$$m=28,\ 0,\ 9,\ 1,\ -1,\ -29,\ -2,\ -10 \cdots \text{答}$$

【解 3】

$x=m^4+14m^2$，$y=2m+1$ とする。

$2m=y-1$ であり，$4m^2=(y-1)^2$ でさらには $16m^4=(y-1)^4$

今，

$$\begin{aligned} 16x&=16m^4+14\cdot16m^2 \\ &=(y-1)^4+56(y-1)^2 \\ &=y^4-4y^3+6y^2-4y+1+56y^2-112y+56 \\ &=y^4-4y^3+62y^2-116y+57 \end{aligned}$$

$$\frac{16x}{y}=y^3-4y^2+62y-116+\frac{57}{y}$$

条件より，$\dfrac{x}{y}$ は整数であるため，$\dfrac{57}{y}$ が整数となる。

ゆえに，y は 57 の約数

よって，$y=\pm1,\ \pm3,\ \pm19,\ \pm57$

$$2m+1=\pm1,\ \pm3,\ \pm19,\ \pm57$$

$$\therefore\ m=-29,\ -10,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 9,\ 28 \cdots \text{答}$$

【総括】

例題よりも次数が高いため，

$$\frac{m^2(m^2+14)}{2m+1}\text{ が整数 }\Leftrightarrow\frac{m^2+14}{2m+1}\text{ が整数}$$

と見るべき部分を見定めたいところです。

こうしてみると【解 3】は次数をそれほど意識したわけではありませんが，

条件を翻訳しただけでシンプルにまとまりました。