n を正の整数とする。

(1) n^2 と $2n+1$ は互いに素であることを示せ。

(2) n^2+2 が $2n+1$ の倍数になる n を求めよ。

＜ '92 一橋大 ＞

【戦略 1】

(1) **互いに素であることを示すために，最大公約数が 1 であることを目指すというのが一つの手です。**

そこで，最大公約数を扱う有力手段の一つであるユークリッドの互除法を用いることを考えたいと思います。

2 つの正の整数 M，N の最大公約数を $G(M, N)$ と表すことにします。

$G(n^2, 2n+1)$ を考え，互除法をもちいるために割り算を考えますが n^2 を $2n+1$ で割る際，商が $\frac{1}{2}n+\square$ という形となってしまい，扱いづらいです。

そこで，$G(2n^2, 2n+1)$とすると，$2n^2=n(2n+1)-n$ ですが，これも，余りが負となり，鬱陶しいものがあります。

そうなると，次の候補は $G(4n^2, 2n+1)$ です。

$4n^2=(2n+1)(2n-1)+1$ なので，

$$G(4n^2, 2n+1)=G(2n+1, 1)=1$$

で，$4n^2$ と $2n+1$ が互いに素であることが言えました。

4 と奇数 $2n+1$ は互いに素であるため，n^2 と $2n+1$ も互いに素となります。

(2) **$\dfrac{n^2+2}{2n+1}$ が整数となるときを考えるわけです。**

整数問題の常套手段の 1 つ (整数)=(分数) の形を目指すために頭でっかちを直す「帯分数化」を狙いたいところです。

ただ，(1) 同様，商が扱いづらいため，$\dfrac{4(n^2+2)}{2n+1}=$整数 という形で考えます。

【解 1】

(1) 2 つの正の整数 M，N の最大公約数を $G(M, N)$ と表す。

$4n^2=(2n+1)(2n-1)+1$ より，ユークリッドの互除法から

$$G(4n^2, 2n+1)=G(2n+1, 1)=1$$

よって，$4n^2$ と $2n+1$ は互いに素である。

また，4 と $2n+1$ は共通素因数をもたないため，n^2 と $2n+1$ も共通素因数をもたず，n^2 と $2n+1$ は互いに素である。

(2) $n^2+2=m(2n+1)$ (m は整数) であるとき，$4(n^2+2)=4m(2n+1)$ であるから，

$$\frac{4n^2+8}{2n+1}=4m$$

$$\frac{(2n-1)(2n+1)+9}{2n+1}=4m$$

$$2n-1+\frac{9}{2n+1}=4m$$

$$\frac{9}{2n+1}=4m-2n+1$$

$\dfrac{9}{2n+1}$ は整数であるため，$2n+1$ は 1 より大きな 9 の正の約数である。

よって，$2n+1=3, 9$ であり，$n=1, 4$ …答

【戦略 2】(2) について

$n^2+2=m(2n+1)$ **とした後，** $(n-m)^2=m^2+m-2$ **と見ることができれば**

$$m^2+m-2 \text{ が平方数である}$$

ということが見出せます。

$m^2+m-2<m^2+2m+1\ (=(m+1)^2)$

なので， m^2+m-2 **は** m^2, $(m-1)^2$, $\cdots$ **と** m^2 **以下の平方数であることが分かります。**

ただ，あまり小さ過ぎることもないでしょうから，手探りで下の下限を探せば， $(m-1)^2$ **以上であることが分かりますから，**

$$\text{平方数 } m^2+m-2 \text{ の候補は } (m-1)^2,\ m^2$$

ということが言え，解決です。

【解 2】(2) について

m を自然数として，$n^2+2=m(2n+1)$ と表せる。

これより，$(n-m)^2=m^2+m-2$ で，
m^2+m-2 は平方数である。…(☆)

$(m+1)^2-(m^2+m-2)=m+3>0$

$(m-1)^2-(m^2+m-2)=-3(m-1)\leqq 0$

これより，$(m-1)^2\leqq m^2+m-2<(m+1)^2$ …(★)

(☆)，(★) より，$m^2+m-2=(m-1)^2$ または $m^2+m-2=m^2$

$m^2+m-2=(m-1)^2$ のとき $m=1$ で，このとき，$n^2+2=2n+1$

すなわち $(n-1)^2=0$ となり，$n=1$

$m^2+m-2=m^2$ のとき $m=2$ で，このとき $n^2+2=2(2n+1)$

すなわち $n(n-4)=0$ となり，$n=4$

以上から，求める正の整数 n は $n=1$，4 …答

【戦略 3】(2) について

$x=n^2+2$，$y=2n+1$ **というように名前をつけると明確です。**

ここから n **を消去するために，** $2n=y-1$ **とします。**

分数が登場しないように n **を消去するためには，** $4x=4n^2+8$ **という形で見たくなると思います。**

このあたりの「4 倍」というキーナンバーは【解 1】と通じるものがあるでしょう。

【解 3】(2) について

$x=n^2+2$，$y=2n+1$ とすると，$4x=4n^2+8$

$4x=(y-1)^2+8$ であり，$4x=y^2-2y+9$

y は正の整数であり，$\dfrac{4x}{y}=y-2+\dfrac{9}{y}$，すなわち

$$\frac{4x}{y}-y+2=\frac{9}{y}$$

今，条件より，$\dfrac{x}{y}$ が整数であるから，左辺は整数となり，$\dfrac{9}{y}$ も整数。

ゆえに，y は 1 より大きな正の奇数であるから，$y=3$，9

よって，$n=1$，4 …答

【総括】

整数問題らしく，様々なモノの見方ができ，その一つ一つはその他の問題に対する糧となる要素を含んでいます。

(1) も互除法を用いましたが，

4 と $2n+1$ は互いに素である。…$(*)$

$4n^2$ と $2n+1$ の最大公約数を G とすると

$$\begin{cases} 4n^2=G\alpha & \cdots ② \\ 2n+1=G\beta & \cdots ③ \end{cases} \quad (\alpha,\ \beta \text{ は互いに素な正の整数})$$

と表せる。

③ より $2n=G\beta-1$ であり，$4n^2=(G\beta-1)^2$

② より，$G\alpha=(G\beta-1)^2$ で，これより $G(\alpha+2\beta-\beta^2)=1$

G，$\alpha+2\beta-\beta^2$ は整数であるため，$G=1$

$4n^2$ と $2n+1$ は互いに素である。…$(*)'$

$(*)$，$(*)'$ より，n^2 と $2n+1$ は互いに素である。

と直接的に記述してもよいでしょう。