3つの実数 α，β，$\alpha\beta$（ただし，$\alpha<0<\beta$）がある。これらの数は適当に並べると等差数列になり，また適当に並べると等比数列にもなるという。

この条件を満たすような α，β の組 $(\alpha,\ \beta)$ を求めよ。

＜ ’08 立命館大 ＞

【戦略】

例題と違い，並び方が「この順」というように決まっているわけではありません。

そこで，符号に注目し，

「等差数列や等比数列になるとしたらこの並び方しかないだろう」

というように可能性を絞っていきます。

今回の 3 数の符号に注意すると

$$\alpha<0,\ \beta>0,\ \alpha\beta<0$$

です。

正の数が 1 つしかない状態で等比数列になるとしたら，

負，正，負

という形しかあり得ませんから，等比中項（真ん中）は β であることになります。

これにより，$\beta^2=\alpha\cdot\alpha\beta$ で，$\beta>0$ より，$\beta=\alpha^2$ という関係を得ることになります。

これにより与えられた 3 数は，

$$\alpha,\ \beta\,(=\alpha^2),\ \alpha\beta\,(=\alpha^3)$$

となります。

次にこれら 3 数が等差数列となる並びを考えますが，等差数列となるからには

単調増加 または 単調減少

という単調な大小関係となります。

そうなってくると，$\alpha<\alpha^3<0<\alpha^2$ または $\alpha^3<\alpha<0<\alpha^2$ といういずれかということになり，

$$2\alpha^3=\alpha+\alpha^2 \text{ または } 2\alpha=\alpha^3+\alpha^2$$

という可能性しかありません。

【解答】

条件 $\alpha<0<\beta$ より，$\alpha\beta<0$ であり，与えられた 3 数の正負は

$$\begin{cases}\alpha<0\\ \beta>0\\ \alpha\beta<0\end{cases}$$

であるため，これら 3 数が等比数列になるような並び方は

$$\alpha,\ \beta,\ \alpha\beta \text{ または } \alpha\beta,\ \beta,\ \alpha$$

の形に限られる。

いずれにせよ等比中項は β であるため，$\beta^2=\alpha^2\beta$

$\beta>0$ であるため，$\beta=\alpha^2$ …① を得る。

ゆえに，与えられた 3 数は，α，α^2，α^3 であり，

$$\alpha<\alpha^3<0<\alpha^2 \text{ または } \alpha^3<\alpha<0<\alpha^2$$

という大小関係から，等差中項としてあり得るのは α^3 または α

[1]　等差中項が α^3 であるとき（← α，α^3，α^2 または α^2，α^3，α）

$2\alpha^3=\alpha+\alpha^2$ で，$\alpha<0$ であるため，$2\alpha^2=1+\alpha$

$2\alpha^2-\alpha-1=0 \Leftrightarrow (2\alpha+1)(\alpha-1)=0$ で，$\alpha<0$ より $\alpha=-\dfrac{1}{2}$

このとき ① より $\beta=\dfrac{1}{4}$

[2]　等差中項が α であるとき（← α^3，α，α^2 または α^2，α，α^3）

$2\alpha=\alpha^3+\alpha^2$ で，$\alpha<0$ であるため，$2=\alpha^2+\alpha$

$\alpha^2+\alpha-2=0 \Leftrightarrow (\alpha+2)(\alpha-1)=0$ で，$\alpha<0$ より $\alpha=-2$

このとき ① より $\beta=4$

以上 [1]，[2] より，$(\alpha,\ \beta)=\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right),\ (-2,\ 4)$ …答

【総括】

真ん中となる項（等差中項，等比中項）に注目し，それらをいかに把握するかを考察することが求められました。

３数の符号に注目し，そこから大小関係を見出していく部分は本問の面白いところであり，醍醐味でしょう。