3つの異なる実数 a，b，c がこの順序で等差数列をなし，b，c，a の順序で等比数列をなすとする。ただし，公差は0でなく，公比は1でないとする。
(1)　$a+b+c=15$ であるとき，a，b，c を求めよ。
(2)　$abc=64$ であるとき，a，b，c を求めよ。

＜ '06 愛知大 ＞

【戦略】

一般に 3 数 a，b，c がこの順に等差数列であるとき

$$2b=a+c\ \left(b=\frac{a+c}{2}\right)$$

という関係が成り立ちます。（b を a，c の等差中項と言います。）

また，3 数 a，b，c がこの順に等比数列であるとき

$$b^2=ac$$

という関係が成り立ちます。（b を a，c の等比中項と言います。）

本問においては，$\begin{cases}2b=a+c\\ c^2=ab\end{cases}$ という 2 式が成り立ちます。

これに (1)，(2) の条件が加わるため，結局は連立方程式の問題になります。

「条件 1 つで 1 文字消去」という原則に従い，上記 2 式から 2 文字消しておくと手際が良いでしょう。

【解答】

a，b，c がこの順序で等差数列となるので，$2b=a+c$ …①

b，c，a がこの順序で等比数列となるので，$c^2=ab$ …②

① より，$c=2b-a$ …①′

② に代入すると，$(2b-a)^2=ab$

これを整理すると，$a^2-5ab+4b^2=0$

すなわち $(a-4b)(a-b)=0$

a，b，c は相異なるという条件から，$a\fallingdotseq b$ であり，$a=4b$

このとき ①′ より，$c=-2b$

ゆえに，$(a,\ b,\ c)=(4b,\ b,\ -2b)$

(1)　条件 $a+b+c=15$ であるため，$4b+b-2b=15$，すなわち

$$b=5$$

ゆえに，$(a,\ b,\ c)=(20,\ 5,\ -10)$ …答

(2)　条件 $abc=64$ であるため，$4b\cdot b\cdot(-2b)=64$

$$b^3=-8$$

$b^3+8=0$，すなわち $(b+2)(b^2-2b+4)=0$

条件より b は実数であるため，$b=-2$

ゆえに，$(a,\ b,\ c)=(-8,\ -2,\ 4)$ …答

【戦略 2】

b，c，a という等比数列の並びに対し，$c=br$，$a=br^2$ と表してもよいでしょう。

【解 2】

b，c，a という等比数列の並びに対し，公比を r ($r\fallingdotseq 1$) として

$$c=br,\ a=br^2$$

と表せる。

このとき，$a\ (=br^2)$，b，$c\ (=br)$ がこの順で等差数列であるため

$$2b=br^2+br$$

$b=0$ とすると，$a=c=0$ となってしまい，a，b，c が相異なるという条件に反するため，$b\fallingdotseq 0$ であり

$$2=r^2+r$$

これより，$r^2+r-2=0$ で，$(r+2)(r-1)=0$

$r\fallingdotseq 1$ より，$r=-2$ を得て，$(a,\ b,\ c)=(4b,\ b,\ -2b)$ を得る。

（以下【解 1】に準ずる）

【戦略 3】

(1) **では和に注目し，**(2) **では積に注目して文字消去するのもよいでしょう。**

【解 3】

a，b，c がこの順序で等差数列となるので，$2b=a+c$ …①

b，c，a がこの順序で等比数列となるので，$c^2=ab$ …②

(1)　$a+b+c=15$ より，$a+c=15-b$ であり，① より

$2b=15-b$ で，$b=5$ を得る。

このとき ①，② より $\begin{cases} a+c=10 \\ 5a=c^2 \end{cases}$

$c=10-a$ であるため，$5a=(10-a)^2$

これを整理すると $a^2-25a+100=0$

$(a-20)(a-5)=0$ で，$a=5$ とすると，$a=b$ となってしまう。

よって，$a=20$ を得て，このとき，$c=-10$

ゆえに，$(a, b, c)=(20, 5, -10)$ …答

(2)　$abc=64$ より，② から，$c^2 \cdot c=64$，すなわち $c^3-64=0$

$(c-4)(c^2+4c+16)=0$ で，c は実数であるため $c=4$

このとき，①，② より $\begin{cases} 2b=a+4 \\ ab=16 \end{cases}$

$a=2(b-2)$ であるため，$b(b-2)=8$

これを整理すると，$b^2-2b-8=0$

$(b-4)(b+2)=0$ で，$b=4$ とすると，$b=c$ となってしまう。

よって，$b=-2$ を得て，このとき $a=-8$

ゆえに，$(a, b, c)=(-8, -2, 4)$ …答

【総括】

a，b，c がこの順に等差数列であることの翻訳は

①：$(a, b, c)=(a, a+d, a+2d)$ (公差 d と設定)

②：$(a, b, c)=(b-d, b, b+d)$

③：$2b=a+c$

とするのが代表的ですが，① や ② から ③ が示されます。

同様に a，b，c がこの順に等比数列であることの翻訳は

①：$(a, b, c)=(a, ar, ar^2)$ (公比 r と設定)

②：$(a, b, c)=\left(\dfrac{b}{r}, b, br\right)$

③：$b^2=ac$

とするのが代表的で，同じく ① や ② から ③ が示されます。

なので【戦略 2】は【解 1】の方針とほぼ同じことです。