　さいころを $n$ 回振り，第 1 回目から第 $n$ 回目までに出たさいころの目の数 $n$ 個の積を $X_n$ とする。
(1)　$X_n$ が 5 で割り切れる確率を求めよ。
(2)　$X_n$ が 4 で割り切れる確率を求めよ。
(3)　$X_n$ が 20 で割り切れる確率を $p_n$ とおく。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(1-p_n)$$

を求めよ。
注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。
＜ '03 東京大 ＞

**【戦略】**

(1)　**5 で割り切れるのは「少なくとも 1 回 5 の目が出る」**

**それに対して 5 で割り切れないのは「毎回 1，2，3，4，6 のいずれかの目が出る」という事象が起こるときです。**

**もちろん言うまでもなく「毎回」の方が扱いやすいので，5 で割り切れないという余事象を考えます。**

(2)　**やはり余事象を考えたいでしょう。**

**2，4，6 という偶数の目は，** $\begin{cases} 2,\ 6\ (4\text{ で割って }2\text{ 余る}) \\ 4\ (4\text{ の倍数}) \end{cases}$ **という 2 グループに分けて考える必要性があります。**

**4 の倍数にならないときを考える際に，4 は出たら 1 発アウトです。**

**2，6 は 1 回までなら出ることが許されるので**

$\begin{cases} n\text{ 回とも奇数の目が出る} \\ 1\text{ 回は }2,\ 6\text{ の目が出て，}n-1\text{ 回は奇数の目が出る} \end{cases}$

**と場合分けすればよいでしょう。**

(3)　**考える極限の式に含まれる $1-p_n$ は余事象の形なので，引き続き余事象をとらえます。**

**20 で割り切れるというのは「4 の倍数」かつ「5 の倍数」**

**ですから，その否定である 20 で割り切れないというのは**

**「4 の倍数でない」または「5 の倍数でない」**

**ということです。**

**各々の確率は (1)，(2) で求めていますから，残るは**

**「4 の倍数でない」かつ「5 の倍数でない」**

**となる確率を求めればオシマイです。**

【解答】

(1)　$X_n$ が 5 で割り切れない確率，すなわち
$n$ 回とも 1，2，3，4，6 のいずれかの目が出る確率は $\left(\frac{5}{6}\right)^n$

ゆえに，求める確率は $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$ …答

(2)　$X_n$ が 4 で割り切れない確率を求める。

$X_n$ が 4 で割り切れないとは

①：$n$ 回とも奇数（1，3，5 の目）が出る
または
②：1 回は 2，6 の目が出て，$n-1$ 回は 奇数（1，3，5）の目が出る

のいずれかが起こる。

① が起こる確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

② が起こる確率は ${}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{6}\right)^1\left(\frac{3}{6}\right)^{n-1}=\frac{2n\cdot 3^{n-1}}{6^n}$

求める確率は $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{2n\cdot 3^{n-1}}{6^n}$ …答

(3)　$X_n$ が 20 で割り切れない確率が $1-p_n$

$X_n$ が 20 で割り切れないとは，
$X_n$ が「4 の倍数でない …③」または「5 の倍数でない …④」
となること

③ の確率は (2) から $\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2n\cdot 3^{n-1}}{6^n}$

④ の確率は (1) から $\left(\frac{5}{6}\right)^n$

③ かつ ④ となる確率を求める。

$X_n$ が 4 で割り切れない かつ 5 で割り切れないとは

$n$ 回とも 1，3
または
1 回は 2，6 の目が出て，$n-1$ 回は 1，3 の目が出る。

となることであり，その確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{6}\right)^1\left(\frac{2}{6}\right)^{n-1}=\frac{(n+1)\,2^n}{6^n}$$

③ または ④ が起こる確率が $1-p_n$ であり

$$1-p_n=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2n\cdot 3^{n-1}}{6^n}\right\}+\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left\{\frac{(n+1)\,2^n}{6^n}\right\}$$
$$=\frac{3^n+2n\cdot 3^{n-1}+5^n-(n+1)\,2^n}{6^n}$$
$$=\frac{(2n+3)\,3^{n-1}+5^n-(n+1)\,2^n}{6^n}$$
$$=\frac{2n+3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{5}{6}\right)^n-(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$=\left(\frac{5}{6}\right)^n\left\{\frac{2n+3}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^n+1-(n+1)\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}$$

$$\log(1-p_n)=n\log\frac{5}{6}+\log\left\{\frac{2n+3}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^n+1-(n+1)\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}$$

$$\frac{1}{n}\log(1-p_n)=\log\frac{5}{6}+\frac{1}{n}\log\left\{\frac{2n+3}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^n+1-(n+1)\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}\to\log\frac{5}{6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(1-p_n)=\log\frac{5}{6}\ \cdots\text{答}$$

【総括】

サイコロの目による積を考えていく問題自体は定番の話題です。

多分設問のオチがなくても自然に余事象をとると思いますから，あんまり変なことを考えず「素直に」路線決定すればよいでしょう。