　正六角形の頂点に 1 から 6 までの番号を順につける。また，n 個のサイコロを振り，出た目を番号とするすべての頂点にしるしを付けるものとする。このとき，しるしの付いた三点を頂点とする直角三角形が存在する確率を p_n とする。

(1)　p_3，p_4 を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(1-p_n)$ を求めよ。

＜ ’87 東京大 ＞

【戦略】

(1)　**3 個のサイコロを投げて三角形ができるときを考えるので，番号がダブっているなど余計なことは考えなくてよいですから，どうとでもなります。**

反面 p_4 は方針によって多少煩雑さが変わってきます。
将来の p_n を考えるにあたり，(2) に繋がるような発想をしたいところです。

この試行においては基本的に n が大きくなれば当然付けられる印の数の期待値も大きくなりますから，直角三角形ができないことの方がレアケースです。
(4 点印がつけば，その時点で直角三角形が存在します。)

確率においては直接計算するか，余事象を求めるかということを考えますが，レアケースである直角三角形ができない確率を出す方が得策です。

(2)　**求める式に含まれる $1-p_n$ という部分が余事象であることを考えると (1) で考える余事象 $1-p_4$ を求める思考過程が (2) でもそのまま使えそうです。**

【解答】

(1)　p_3 について

サイコロを 3 個投げたときの目が

$\left(1,4,\begin{matrix}2\\3\\5\\6\end{matrix}\right)$，$\left(2,5,\begin{matrix}1\\3\\4\\6\end{matrix}\right)$，$\left(3,6,\begin{matrix}1\\2\\4\\5\end{matrix}\right)$ のいずれかであればよい。

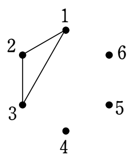
したがって，$p_3=\dfrac{3!\times4}{6^3}\times3=\dfrac{1}{3}$ … 答

p_4 について

直角三角形が存在しないという余事象の確率 $1-p_4$ について考える。

(i)　相異なる印が 3 つのとき

(i−1)



などの二等辺三角形ができるとき

例えば，(1，2，3) という頂点の三角形ができる目の出方は

$\left(1,2,3,\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\right)$ という番号の組み合わせであり，

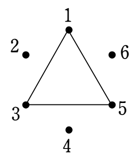
$$\frac{4!}{2!}\times3=36 \text{【通り】}$$

(2，3，4)，(3，4，5)，(4，5，6)，(5，6，1)，(6，1，2) という頂点の三角形ができる目の出方も同様に 36 通りずつある。

したがって，二等辺三角形ができる目の出方は

$$36\times6=216 \text{【通り】}$$

(i−2)



などの正三角形ができるとき

(1，3，5)，(2，4，6) という頂点の三角形ができる目の出方はそれぞれ (i−1) と同様に考えて 36 通りずつであり，正三角形ができる目の出方は $36\times2=72$ 【通り】

(ii)　相異なる印が 2 つのとき

例えば (1，2) という頂点からなる線分ができる目の出方は (1，1，1，2)，(1，1，2，2)，(1，2，2，2) という目の組み合わせで出ればよく

$$\frac{4!}{3!}\times2+\frac{4!}{2!2!}=14 \text{【通り】}$$

の目の出方がある。

線分を構成する頂点の番号の選び方は ${}_6C_2=15$ 【通り】なので

$$14\times15=210 \text{【通り】}$$

の目の出方がある。

(iii)　印が1つだけのとき　$(1,1,1,1)$ ～ $(6,6,6,6)$ までの6通りの目の出方がある。

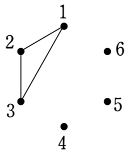
以上 (i), (ii), (iii) から直角三角形ができない目の出方は

$$216+72+210+6=504 \text{【通り】}$$

ゆえに，$1-p_4=\dfrac{504}{6^4}=\dfrac{7}{18}$ であり，$p_4=\dfrac{11}{18}$ …答

(2)　直角三角形ができないという余事象の確率 $1-p_n$ について考える。

(i)　相異なる印が3つのとき



などの二等辺三角形ができるとき

例えば，$(1,2,3)$ という頂点の三角形ができる目の出方は

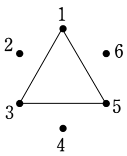
n 回とも 1，2，3 という3通りの出方の 3^n 通りから

2種類の目しか出ない ${}_3C_2(2^n-2)=3\cdot 2^n-6$【通り】

1種類の目しか出ない3通り

を除いた $3^n-(3\cdot 2^n-6)-3=3^n-3\cdot 2^n+3$ 【通り】である。

$(2,3,4)$, $(3,4,5)$, $(4,5,6)$, $(5,6,1)$, $(6,1,2)$ という頂点の三角形ができる目の出方も同様に $3^n-3\cdot 2^n+3$ 通りずつある。



などの正三角形ができるときも同様なので

結局は $8\times(3^n-3\cdot 2^n+3)=8\cdot 3^n-24\cdot 2^n+24$ 【通り】が二等辺三角形，正三角形ができるような目の出方である。

(ii)　相異なる印が2つのとき

例えば $(1,2)$ という頂点からなる線分ができる目の出方は
n 回とも 1，2 という 2^n 通りの出方から1種類の目しかでない2通りを除いた 2^n-2 通りである。

線分を構成する頂点の番号の選び方は ${}_6C_2=15$ 【通り】あるので，
$15\times(2^n-2)=15\cdot 2^n-30$ 【通り】の目の出方がある。

(iii)　印が1つだけのとき　n 回の目が全て 1 ～ 全て 6 という6通り

以上から，$(8\cdot 3^n-24\cdot 2^n+24)+(15\cdot 2^n-30)+6=8\cdot 3^n-9\cdot 2^n$ 【通り】が直角三角形ができないような目の出方である。

したがって，

$$\begin{aligned}1-p_n&=\frac{8\cdot 3^n-9\cdot 2^n}{6^n}\\&=8\left(\frac{1}{2}\right)^n-9\left(\frac{1}{3}\right)^n\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left\{8-9\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}\end{aligned}$$

強いもので括るのは不定形解消の常套手段です。

ゆえに，$\log(1-p_n)=\log\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+\log\left\{8-9\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right\}$

$$=-n\log 2+\log\left\{8-9\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

よって，$\dfrac{1}{n}\log(1-p_n)=-\log 2+\dfrac{1}{n}\log\left\{8-9\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right\}$ なので

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(1-p_n)=-\log 2$ …答

この部分は不定形ではありません。

【総括】

$\dfrac{\square}{6^n}$ という形で確率を考える以上，出る目の「順番」は気にする必要があります。

【戦略】でも述べましたが，求める $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(1-p_n)$ という形が最大のヒントで，余事象を考える大きな動機になります。